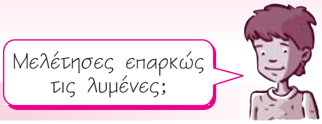
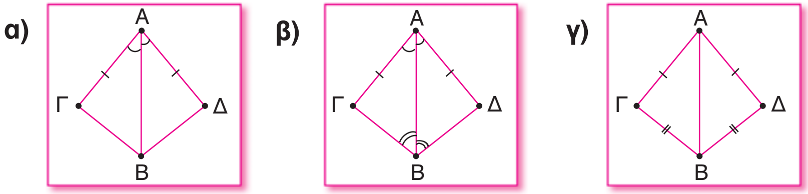


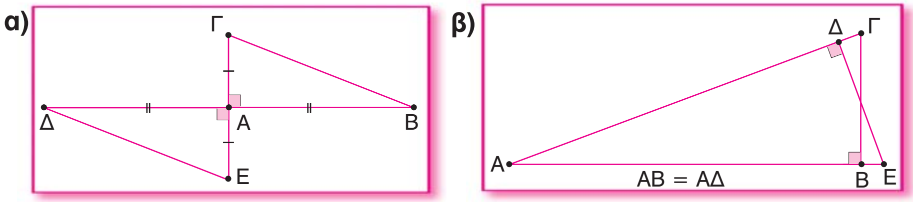
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.



2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΔ σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.



3. **α)** Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.
β) Να εξετάσετε τι είδους τρίγωνο ορίζουν τα μέσα των πλευρών ενός ισόπλευρου τριγώνου.

4. Δίνεται γωνία xOy, τα σημεία Α, Β στην Ox και τα σημεία Γ, Δ στην ημιευθεία Oy, έτσι ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και θεωρούμε σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα σημεία Β, Γ και από την πλευρά ΒΓ.

6. Δίνονται οι κύκλοι (Λ, ρ_1) και (Κ, ρ_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΛ είναι ίσα και ότι το ΛΚ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.
β) Να εξετάσετε πότε η χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΛΚ.

7. **α)** Να αποδείξετε ότι, αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.
β) Να αποδείξετε ότι, αν δύο χορδές κύκλου είναι ίσες, τότε είναι ίσα και τα αντίστοιχα τόξα.

8. Να αποδείξετε ότι η κάθετη που φέρνουμε από το κέντρο κύκλου (Ο, ρ) στη χορδή ΑΒ διέρχεται από το μέσο της χορδής και το μέσο του αντίστοιχου τόξου.

9. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: ΒΕ = ΕΔ.

10. Να αποδείξετε (χρησιμοποιώντας ίσα τρίγωνα) ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θα ισχύει: ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ, $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ}$. Αν επιπλέον Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ, να αποδείξετε ότι: ΑΟ = ΟΓ και ΒΟ = ΟΔ.

11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιές του είναι ίσες και ότι οι διαγώνιές του δημιουργούν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο ίσα μεταξύ τους.

12. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ το μέσο του ΑΒ. Θεωρούμε σημεία Γ, Δ που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ, έτσι ώστε ΑΓ = ΒΔ και ΜΔ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι: ΑΔ = ΒΓ.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο του ΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ προς το Α και παίρνουμε πάνω σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

14. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα σημεία Κ, Λ, Μ στις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΚ = \frac{3}{4}ΑΒ$, $ΑΛ = \frac{3}{4}ΑΓ$ και ΒΜ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

15. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε, Ζ στις πλευρές ΛΜ, ΚΛ, ΚΜ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΔΜ = \frac{2}{3}ΛΜ$, $ΚΕ = \frac{1}{3}ΚΛ$ και $ΖΜ = \frac{1}{3}ΚΜ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

16. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ) φέρνουμε τα ύψη ΑΕ και και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι: **α)** $Α\hat{Δ}Ε = Β\hat{Γ}Ζ$, **β)** $ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

17. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τις εφαπτομένες ΡΑ και ΡΒ. Να αποδείξετε ότι: **α)** ΡΑ = ΡΒ, **β)** το ΟΡ διχοτομεί τη γωνία ΑΡΒ.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ, πάνω στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: $Α\hat{Γ}Ε = Α\hat{Ζ}Β$.

19. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Να εξετάσετε τι συμβαίνει για τα αντίστοιχα ύψη.

20. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο άκρα κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $O\hat{Γ}A = O\hat{Δ}B$.

Β′ Ομάδα

21. Για τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ, για τα οποία έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{Δ}$, να αποδείξετε ότι: ΑΒ = ΑΓ = ΒΔ = ΔΓ. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.

22. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, όπου τα ΑΔ, Α′Δ′, ΒΕ, Β′Ε′, ΓΖ, Γ′Ζ′ είναι ύψη τους και έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}' < 90°$, ΑΔ = Α′Δ′ και ΒΕ = Β′Ε′:
α) να αποδείξετε ότι: ΓΖ = Γ′Ζ′,
β) αν ΑΜ, Α′Μ′ είναι διάμεσοι, να αποδείξετε ότι: ΑΜ = Α′Μ′,
γ) αν ΒΝ, Β′Ν′ είναι διχοτόμοι, να αποδείξετε ότι: ΒΝ = Β′Ν′.

23. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ προς τις κορυφές Β, Γ, Α αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

24. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Αν ΑΖ είναι το ύψος του ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ και η απόστασή τους είναι ίση με το ΑΖ.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ο εσωτερικό σημείο του τριγώνου, έτσι ώστε ΒΟ = ΟΓ. Αν οι ευθείες ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ, Μ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΛ = ΟΜ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

26. Να αποδείξετε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

27. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

28. Να κατασκευάσετε τα ακόλουθα τρίγωνα ΑΒΓ:
α) ΑΒ = 6 cm, $\hat{A} = 36°$, $\hat{B} = 63°$, **β)** ΑΒ = 4 cm, ΑΓ = 3 cm, $\hat{A} = 47°$,
γ) ΑΒ = 8 cm, ΑΓ = 9 cm, ΓΒ = 7 cm, **δ)** ΑΒ = 3 cm, $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 42°$,
ε) ΑΒ = 6 cm, ΑΓ = 5 cm, $\hat{A} = 90°$, **στ)** ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 7 cm, $\hat{A} = 90°$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις συμπλήρωσης: **1.** $ΒΓ = ΔΖ$, $\hat{A} = \hat{E}$, **2.** $\hat{B} = \hat{Z}$, $ΑΓ = ΔΕ$, **3.** $ΑΒ = ΕΖ$, **4.** $ΑΒ = ΕΖ$, $ΑΓ = ΔΕ$, $ΒΓ = ΔΖ$, **5.** $\hat{B} = \hat{Δ}$, $\hat{Γ} = \hat{E}$, $ΑΓ = ΖΕ$, $ΒΓ = ΕΔ$.

1. **α)** Π – Γ – Π, **β)** Γ – Π – Γ ή Π – Γ – Π, **γ)** Π – Π – Π.

2. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

3. **α)** Μία σύγκριση τριγώνων. **β)** Με δύο συγκρίσεις τριγώνων, ισόπλευρο.

4. $O\hat{A}Δ = O\hat{B}Γ$, $Γ\hat{Δ}E = O\hat{B}E$, $O\hat{E}Δ = O\hat{B}E$.

5. **α)** $ΑΒ = ΑΓ$, $ΑΔ = ΑΕ$, άρα $ΔΒ = ΕΓ$. **β)** $B\hat{Δ}Γ = B\hat{E}Γ$, άρα $ΓΔ = ΕΒ$. **γ)** Αν $ΔΖ \perp ΒΓ$, $ΕΗ \perp ΒΓ$, δείξτε ότι $B\hat{Δ}Z = E\hat{Γ}H$, άρα $ΖΔ = ΕΗ$.

6. **α)** Δείτε ότι $ΛΑ = ΛΒ$, $ΚΑ = ΚΒ$, οπότε ΚΛ μεσοκάθετος του ΑΒ. **β)** Πρέπει $ρ_1 = ρ_2$.

7. Έστω (Ο, ρ) ο κύκλος και ΑΒ, ΓΔ οι χορδές. **α)** $O\hat{A}B = O\hat{Γ}Δ$, άρα $ΑΒ = ΓΔ$. **β)** $O\hat{A}B = O\hat{Γ}Δ$, άρα $B\hat{O}A = Γ\hat{O}Δ$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ΓΔ}$.

8. Αν $ΟΓ \perp ΑΒ$, όπου Γ σημείο της ΑΒ και Δ σημείο του $\overset{\frown}{AB}$, δείξτε ότι $O\hat{A}Γ = O\hat{Γ}B$, οπότε $ΓΑ = ΓΒ$ (δηλαδή Γ μέσο του ΑΒ) και $Γ\hat{O}A = Γ\hat{O}B$, άρα $\overset{\frown}{AΔ} = \overset{\frown}{BΔ}$ (δηλαδή Δ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$).

9. $A\hat{E}B = A\hat{E}Δ$.

10. $A\hat{B}Γ = A\hat{Γ}Δ$, $A\hat{B}Δ = Γ\hat{B}Δ$, $A\hat{O}B = Γ\hat{O}Δ$.

11. $A\hat{B}Γ = A\hat{B}Δ$, οπότε $ΑΓ = ΒΔ$.

12. $A\hat{M}Γ = M\hat{B}Δ$, άρα $\hat{A} = \hat{B}$ και $A\hat{B}Δ = A\hat{B}Γ$, οπότε $ΑΔ = ΒΓ$.

13. $Γ\hat{M}E = B\hat{M}Δ$, άρα $ΜΕ = ΜΔ$.

14. $K\hat{B}M = Λ\hat{M}Γ$, άρα $ΚΜ = ΜΛ$.

15. $K\hat{E}Z = Λ\hat{E}Δ = Δ\hat{Z}M$.

16. **β)** Αφού $A\hat{Δ}E = B\hat{Γ}Z$, ισχύει $ΔΕ = ΓΖ$. Επίσης, $ΓΔ = ΓΖ + ΖΕ + ΕΔ$, οπότε $ΓΔ = 2ΓΖ + ΑΒ$, άρα $ΓΖ = \dfrac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

17. Δείξτε ότι $P\hat{A}O = P\hat{B}O$, οπότε $ΡΑ = ΡΒ$ και $A\hat{P}O = B\hat{P}O$, επομένως το ΟΡ διχοτομεί τη γωνία ΑΡΒ.

18. $A\hat{Γ}E = A\hat{B}Z$, οπότε $A\hat{Γ}E = A\hat{Z}B$.

19. Έστω $A\hat{B}Γ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι. Δείξτε ότι $B\hat{Γ}Δ = B\hat{Γ}E$. Ομοίως, αν ΒΔ, ΓΕ ύψη.

20. $O\hat{Δ}A = O\hat{B}Γ$, άρα $O\hat{Γ}A = O\hat{Δ}B$.

21. Αφού $\hat{A} = \hat{Δ}$, ισχύει $A\hat{B}Γ = A\hat{Γ}B = Δ\hat{B}Γ = B\hat{Γ}Δ$, οπότε δείξτε ότι $A\hat{B}Γ = B\hat{Γ}Δ$. Αφού $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΔΒ = ΔΓ$, το ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.

22. $A\hat{B}E = A'\hat{B}'E'$, άρα $ΑΒ = Α'Β'$. $A\hat{B}Δ = A'\hat{B}'Δ'$, άρα $\hat{B} = \hat{B}'$. $A\hat{B}Γ = A'\hat{B}'Γ'$, άρα $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$. **α)** $Γ\hat{Z}A = Γ'\hat{Z}'A'$, άρα $ΓΖ = ΖΓ$, **β)** $A\hat{B}M = A'\hat{B}'M'$, **γ)** $A\hat{B}N = A'\hat{B}'N'$.

23. $A\hat{Z}Δ = Z\hat{Γ}E = Δ\hat{B}E$.

24. Αν $ΔΗ \perp ΒΓ$, $ΕΘ \perp ΒΓ$, τότε $H\hat{Δ}B = B\hat{A}Z$, άρα $ΔΗ = ΑΖ$ και $A\hat{Z}Γ = E\hat{Γ}Θ$, οπότε $ΕΘ = ΑΖ$.

25. Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές, άρα $O\hat{B}Γ = O\hat{Γ}B$. Επίσης, $B\hat{O}M = Λ\hat{O}Γ$, άρα $O\hat{B}M = O\hat{Γ}Λ$.

26. Για το τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών ΑΒ, ΒΓ που τέμνονται στο Μ, οπότε θα ισχύει $ΜΑ = ΜΒ$ και $ΜΒ = ΜΓ$ αντίστοιχα. Συνεπώς $ΜΑ = ΜΓ$, δηλαδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΓ, οπότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το Μ.

27. Για το τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται στο Κ, οπότε το Κ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και από τις πλευρές ΒΓ, ΒΑ αντίστοιχα. Συνεπώς το Κ ισαπέχει από τις ΓΑ, ΓΒ, δηλαδή το Κ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Γ, οπότε οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το Κ.