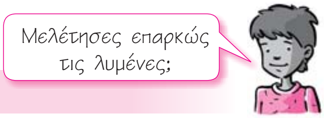
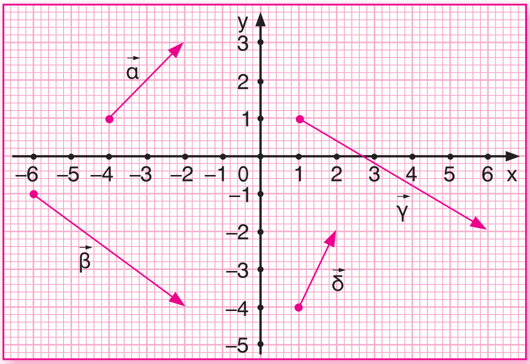


ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′ Ομάδα

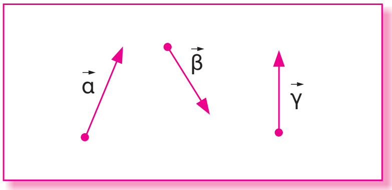
1. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}+\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}+\vec{\gamma}$ και να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}+\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}+\vec{\gamma}$.



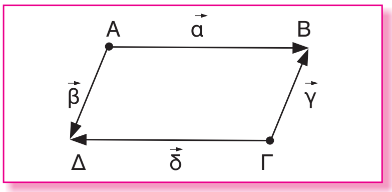
2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α) $\vec{AB}+\vec{BA}$, **β)** $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}$,
γ) $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta A}$, **δ)** $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta E}$.

3. Να υπολογίσετε τα διανύσματα:
α) $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}$, **β)** $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}-\vec{A\Delta}$,
γ) $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}-\vec{\Gamma\Delta}-\vec{\Delta A}-\vec{A\Gamma}$, **δ)** $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Delta E}-\vec{AE}-\vec{E\Gamma}$.

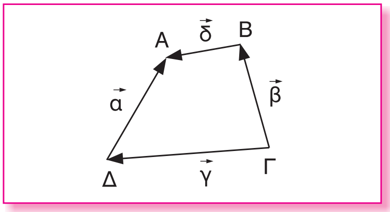
4. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\delta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{\varepsilon}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ για το διπλανό σχήμα.



5. Για το διπλανό σχήμα να βρείτε τα διανύσματα:
α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, **β)** $\vec{\alpha}+\vec{\delta}$, **γ)** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$,
δ) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}$.



6. Για τα δεδομένα του διπλανού σχήματος να βρείτε τα διανύσματα:
α) $\vec{\alpha} - \vec{\gamma}$, **β)** $\vec{\alpha} - \vec{\delta}$, **γ)** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\delta}$,
δ) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$.



7. Αν ΑΒΓ είναι τρίγωνο, να βρεθεί σημείο Μ έτσι ώστε $\vec{MA} - \vec{M\Gamma} + \vec{MB} = \vec{\Gamma B}$.

Β΄ Ομάδα

8. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΜ, ΒΝ, ΓΛ να αποδείξετε ότι: $\vec{AM} + \vec{\Gamma\Lambda} + \vec{BN} = \vec{0}$.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, όπου Μ είναι το μέσο του ΒΓ και Ν το μέσο του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι: $\vec{M\Delta} = \vec{BN}$.

10. Να αποδείξετε ότι, αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, θα ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

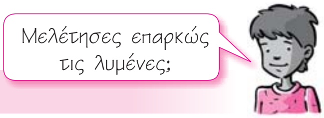
11. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, έτσι ώστε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$.

12. Αν ΑΒΓ είναι τρίγωνο, να βρεθούν οι δυνατές θέσεις του σημείου Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{B\Gamma}| = |\vec{MB}|$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

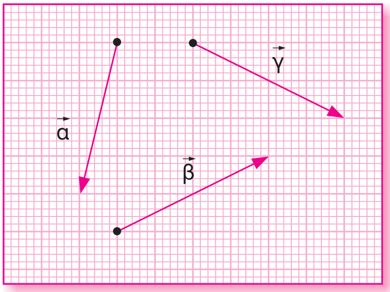
Απαντήσεις σωστού-λάθους: **1.** Σ, **2.** Λ, **3.** Σ, **4.** Σ, **5.** Λ.

1. Με Π.Θ.: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{37}$, $|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = 1$, $|\vec{\gamma} + \vec{\delta}| = \sqrt{37}$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\delta} + \vec{\gamma}| = \sqrt{148}$.
2. **α)** $\vec{0}$, **β)** $\vec{A\Delta}$, **γ)** $\vec{0}$, **δ)** $\vec{AE}$.
3. **α)** $\vec{\Gamma B}$, **β)** $\vec{\Delta\Gamma}$, **γ)** $\vec{A\Gamma}$, **δ)** $\vec{E\Gamma}$.
5. **α)** $\vec{A\Gamma}$, **β)** $\vec{0}$, **γ)** $\vec{\alpha}$, **δ)** $\vec{0}$.
7. Το Μ ταυτίζεται με το Α.
8. Πράξεις.
9. $\vec{M\Delta} = \vec{M\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AN} + \vec{BA} = \vec{BN}$.
10. Ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + (-\vec{\beta}) = \vec{\beta} + \vec{\gamma} + (-\vec{\beta})$, άρα $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.
11. Ισχύει $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ ή $\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta}$, άρα $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$.
12. $|\vec{BA} - \vec{B\Gamma}| = |\vec{MB}|$ ή $|\vec{\Gamma A}| = |\vec{MB}|$, δηλαδή το Μ βρίσκεται στον κύκλο (Β, ΑΓ).

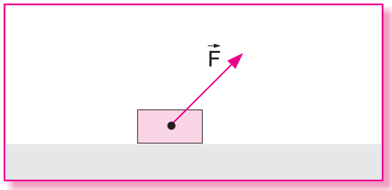


ΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αναλύσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του παρακάτω σχήματος σε δύο κάθετες συνιστώσες.



2. Σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ένα λείο επίπεδο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 80 N που σχηματίζει γωνία 60° με το οριζόντιο επίπεδο. Να βρείτε την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}$.



3. Δύο ομάδες παιδιών προσπαθούν να τραβήξουν ένα μεγάλο κιβώτιο που βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Στην προσπάθειά τους αυτή δένουν το κιβώτιο με δύο σχοινιά, με τα οποία το τραβούν σχηματίζοντας γωνία 90°.

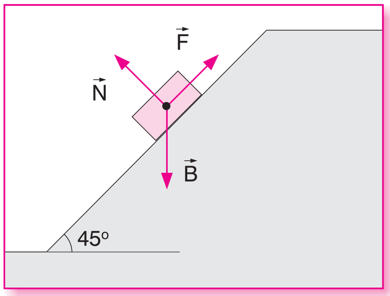
α) Να κάνετε το σχήμα και να σχεδιάσετε τη δύναμη κατά την οποία κινείται το κιβώτιο.

β) Αν η μία ομάδα παιδιών ασκεί δύναμη 15 N και η άλλη 20 N, να βρείτε το μέτρο της δύναμης με την οποία κινείται το κιβώτιο.

4. Σε ένα σώμα βάρους 30 N που βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 45° ασκείται δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 25 N.

α) Να εξετάσετε αν το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω, προς τα κάτω ή αν θα παραμένει ακίνητο.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της κάθετης δύναμης στήριξης $\vec{N}$.



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις πολλαπλής επιλογής: **1.** Β, **2.** Α, **3.** Α, **4.** Β.

2. $|\vec{F}_{οριζ}| = 40N$, $|\vec{F}_{κατ}| = 40\sqrt{3}$ N. **3.** **β)** 25 N.

4. **α)** $|\vec{B}_{οριζ}| = 15\sqrt{2}N < |\vec{F}|$, άρα κινείται προς τα πάνω, **β)** $|\vec{N}| = |\vec{B}_{κατ}| = 15\sqrt{2}$ N.