

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Θεωρία σελ. 73.

A2. Λ, Σ, Σ, Λ, Σ, Λ, Σ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β.

B1. Θέτουμε $\eta\mu x = \alpha > 0$ (αφού $0 < x < \frac{\pi}{2}$) οπότε η

$5\eta\mu^2x + \eta\mu x - 4 = 0$ γράφεται $5\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$ που έχει λύσεις $\alpha = -1$ που απορρίπτεται και δεκτή $\alpha = \frac{4}{5}$ δηλ. $\eta\mu x = \frac{4}{5}$.

Είναι $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x = \frac{9}{25}$, άρα $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$ αφού

$\sigma\upsilon\nu x > 0$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$

B2. $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$.

Έχουμε $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{3}$ και $\epsilon\phi 2x = \frac{2\epsilon\phi x}{1 - \epsilon\phi^2x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$

B3. Έχουμε $0 < \frac{3x}{2} < \frac{3\pi}{4}$ άρα $\eta\mu \frac{3x}{2} > 0$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} - 1 < 0$ αφού

$0 < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{6}$ επομένως $\eta\mu \frac{3x}{2} > \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} - 1$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Πρέπει να ισχύουν $x \neq k\pi$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$, με $k \in \mathbb{Z}$. Είναι

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} =$$
$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.$$

Γ2. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε $\eta\mu x = 0$ άτοπο

άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ οπότε $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1$ με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα $x = \frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Είναι $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(-x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$ διότι $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα

$\sin x < 0$ και $\eta\mu x > 0$. Θέτουμε $\sin x - \eta\mu x = \kappa < 0$ άρα

$$(\sin x - \eta\mu x)^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu x \sin x = \kappa^2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sin x = 1 - \kappa^2 \quad (1).$$

$$\text{Όμως, } \sin x + \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow (\sin x + \eta\mu x)^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu x \sin x = \frac{2}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \sin x = -\frac{7}{9} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει ότι } 1 - \kappa^2 = -\frac{7}{9} \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{4}{3} \text{ αφού } \kappa < 0.$$

Γ4. Έχουμε $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x + \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \sin x > -\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\eta\mu x} > -1$ αφού

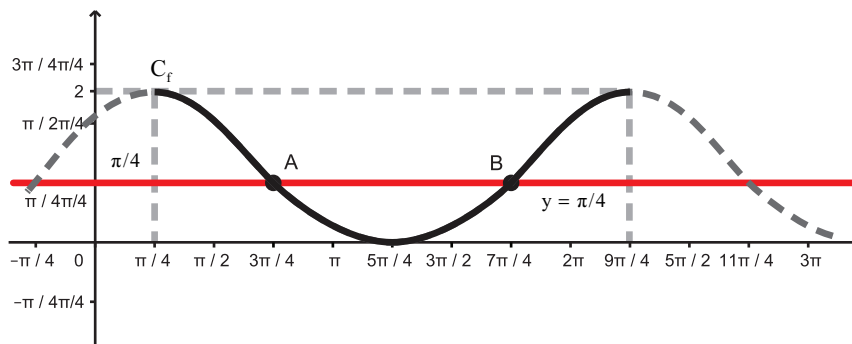
$\eta\mu x > 0$ με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, έχουμε ότι $\sigma\phi x > -1 \Leftrightarrow \sigma\phi x > \sigma\phi \frac{3\pi}{4}$ άρα $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$,

αφού η συνάρτηση $y = \sigma\phi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Είναι $T = 2\pi$, $f_{\max} = 2$ και $f_{\min} = 0$

Δ2.



Από τη γραφική παράσταση της C_f παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = \frac{\pi}{4}$ τέμνει την

καμπύλη σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{4}$ έχει δύο λύσεις στο $[0, 2\pi]$.

Δ3. Έχουμε $f(-x) - 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ και $f(x) - 1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Αρκεί $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$ όμως $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$,

επειδή $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\pi}{2}$, επομένως αρκεί $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$,

που ισχύει

$$\alpha\phi\acute{o}\upsilon \sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\Delta 4. \text{ \textbf{E}\acute{i}\nu\alpha\iota } f_{\min} = 0 \text{ \textbf{γ}\acute{i}\alpha } x = \frac{5\pi}{4} \text{ \textbf{ \acute{a}}\rho\alpha } f(x) \geq f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ \textbf{ \epsilon}\nu\acute{\omega}} h(x) \leq 0 = h\left(\frac{5\pi}{4}\right) = h_{\max}$$

\textbf{Γ}\acute{i}\alpha \text{ \textbf{k}\acute{a}\theta\epsilon } x \neq \frac{5\pi}{4} \text{ \textbf{ \epsilon}\acute{i}\nu\alpha\iota } h(x) \leq 0 < f(x) \text{ \textbf{ \sigma}\tau\omicron } [0, 2\pi]. \text{ \textbf{ \textsc{A}}}\rho\alpha \text{ \textbf{ \tau\omicron } \mu\omicron\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{o} \text{ \textbf{k}\omicron}\iota\nu\acute{o}}

\textbf{ \sigma}\eta\mu\acute{\epsilon}\iota\omicron \text{ \textbf{ \tau}\omega\nu } C_f, C_h \text{ \textbf{ \epsilon}\acute{i}\nu\alpha\iota } \text{ \textbf{ \tau\omicron } } A\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)

\textsc{Θ}\alpha\nu\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma \textsc{Τ}\sigma\iota\acute{o}\upsilon\mu\alpha\varsigma

\textsc{Μ}\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma