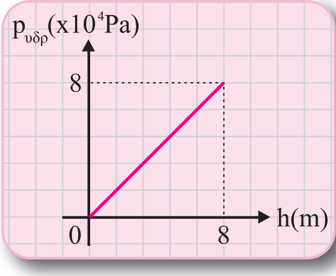
Επομένως: $p_2 = p_{at} + \rho g H$ ή $H = \dfrac{p_2 - p_{at}}{\rho g}$ ή $\mathbf{H = 8m}$

γ) Προσδιορισμός του βάθους h_3

Εφαρμόζοντας τη σχέση για $p = p_{at} + \rho g h$ για h_3, έχουμε:

$p_3 = p_{at} + \rho g h_3$ ή $h_3 = \dfrac{p_3 - p_{at}}{\rho g}$ ή $\mathbf{h_3 = 6m}$



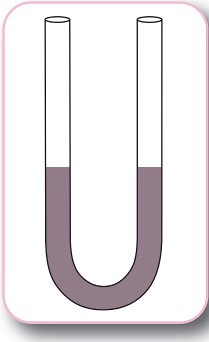
δ) Κατασκευή διαγράμματος $p_{υδρ} = f(h)$

Η υδροστατική πίεση δίνεται από τη σχέση: $p_{υδρ} = \rho g h$

Για h = 0m έχουμε: $p_{υδρ} = 0$

Για h = 8m έχουμε: $p_{υδρ} = 8 \cdot 10^4 Pa$

12.5) Στον σωλήνα του σχήματος αρχικά περιέχεται υδράργυρος πυκνότητας $\rho_υ = 13,6 \cdot 10^3 kg/m^3$. Ρίχνουμε στο σκέλος (1) του σωλήνα λάδι πυκνότητας $\rho_λ = 0,72 \cdot 10^3 kg/m^3$ και στο σκέλος (2) του σωλήνα νερό πυκνότητας $\rho_ν = 10^3 kg/m^3$, μέχρι οι ελεύθερες επιφάνειες του λαδιού και του νερού να είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Η στήλη του νερού έχει ύψος $h_ν = 0,4m$. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α) η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ νερού και υδραργύρου,

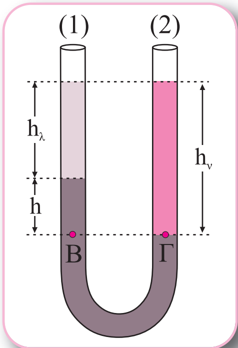
β) το ύψος της στήλης του λαδιού.

Απάντηση

α) Υπολογισμός της πίεσης στη διαχωριστική επιφάνεια νερού – υδραργύρου

Έστω Γ ένα σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ νερού και υδραργύρου. Η πίεση στο σημείο Γ είναι ίση με το άθροισμα της υδροστατικής πίεσης που ασκεί η στήλη του νερού και της ατμοσφαιρικής πίεσης. Επομένως:

$p_Γ = p_{υδρ} + p_{at}$ ή $p_Γ = \rho_ν g h_ν + p_{at}$ ή $\mathbf{p_Γ = 1,04 \cdot 10^5 Pa}$



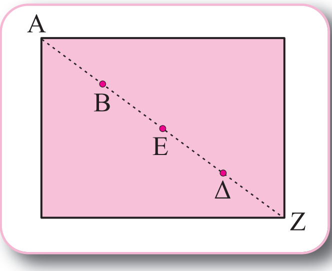
β) Υπολογισμός του ύψους της στήλης του λαδιού

Επειδή η πυκνότητα του υδραργύρου είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του νερού και η πυκνότητα του νερού είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του λαδιού και οι ελεύθερες επιφάνειες των δύο υγρών βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, η στήλη του νερού έχει μεγαλύτερο ύψος από τη στήλη του λαδιού. Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη χαμη-

12.38) Η υδροστατική πίεση του νερού στον πυθμένα ενός πολύ στενού σωλήνα ύψους h_1 είναι p_1. Η πίεση του νερού σε μία λίμνη σε βάθος $h_2 = \frac{h_1}{2}$ είναι p_2. Θεωρούμε ότι το νερό του σωλήνα είναι ίδιο με το νερό της λίμνης και ότι ισορροπεί και στις δύο περιπτώσεις. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $p_2 = 2p_1$ β) $p_2 = \frac{p_1}{2}$ γ) $p_2 = p_1$

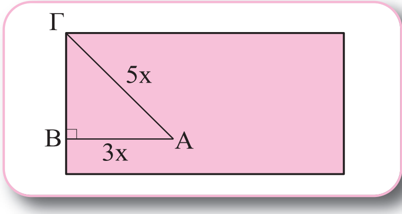
12.39) Στο σχήμα φαίνεται η εγκάρσια διατομή ενός δοχείου το οποίο είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Τα σημεία Β, Ε και Δ βρίσκονται στη διαγώνιο ΑΖ και ισχύουν οι σχέσεις ΑΕ = ΕΖ, ΑΒ = ΒΕ και ΔΕ = ΔΖ. Στα σημεία Β, Ε και Δ η υδροστατική πίεση είναι p_B, p_E και p_Δ αντίστοιχα. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) $p_E = \frac{p_\Delta - p_B}{2}$ β) $p_E = \frac{p_B + p_\Delta}{2}$

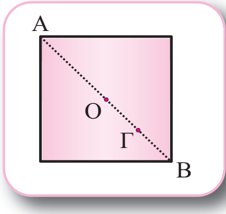
γ) $p_E = \frac{2p_B + p_\Delta}{2}$

12.40) Στο σχήμα φαίνεται η εγκάρσια διατομή ενός δοχείου το οποίο είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Εάν g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η υδροστατική πίεση στο σημείο Α υπολογίζεται από τη σχέση:



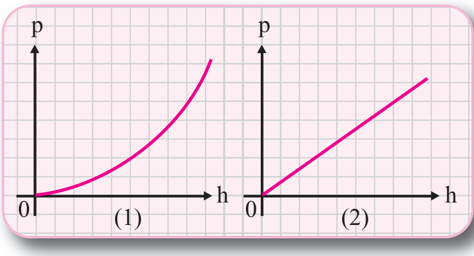
α) $p_A = \rho g x$ β) $p_A = 4\rho g x$ γ) $p_A = 2\rho g x$

12.41) Το τετράγωνο του σχήματος με πλευρά α είναι η εγκάρσια διατομή ενός δοχείου. Το δοχείο είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας ρ το οποίο ισορροπεί. Τα σημεία Ο και Γ είναι σημεία της διαγωνίου ΑΒ για τα οποία ισχύει ΑΟ = ΒΟ και ΓΟ = ΓΒ. Εάν στο σημείο Γ η υδροστατική πίεση είναι $p_\Gamma = \frac{\rho g \sqrt{2}}{4}$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η πλευρά του τετραγώνου είναι:

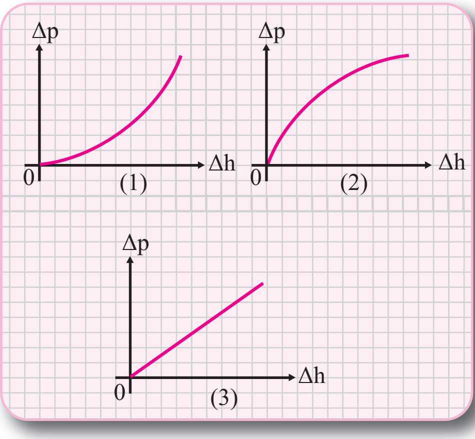


α) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ m β) $\alpha = \frac{2}{3}$ m γ) $\alpha = 1$m

12.42) Ένα δοχείο έχει ύψος Η και είναι γεμάτο με ένα υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στα σημεία του υγρού σε συνάρτηση με το βάθος στο οποίο βρίσκονται είναι το:



12.59) Το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η διαφορά πίεσης Δp μεταξύ δύο σημείων ενός υγρού που ισορροπεί μέσα σε ανοικτό δοχείο σε συνάρτηση με την υψομετρική τους διαφορά Δh είναι το:

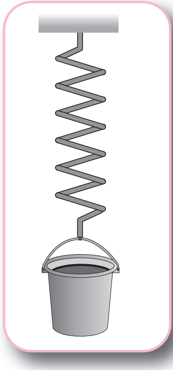


α) (1) β) (2) γ) (3)

12.60) Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει μέχρι ύψους h_1 ένα υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Προσθέτουμε στο δοχείο μία νέα ποσότητα του ίδιου υγρού, οπότε το υγρό φτάνει σε ύψος h_2. Αφού ισορροπήσει εκ νέου το υγρό, η πίεση στον πυθμένα του δοχείου:

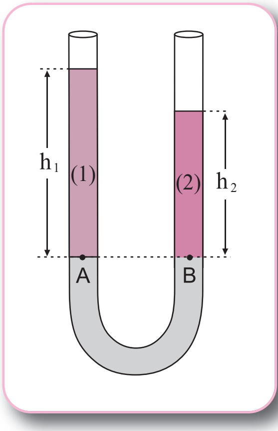
α) δε μεταβάλλεται.
β) αυξάνεται κατά $\rho g(h_2 - h_1)$.
γ) αυξάνεται κατά $\rho g(h_1 + h_2)$.

12.61) Ένα δοχείο περιέχει νερό και κρέμεται από έναν ζυγό ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν βυθίσουμε στο νερό ένα κομμάτι χαλκού, η ένδειξη του ζυγού:



α) δε θα μεταβληθεί.
β) θα αυξηθεί.
γ) θα μειωθεί.

12.62) Μέσα σε συγκοινωνούντα δοχεία ισορροπούν δύο υγρά (1) και (2) που δεν αναμειγνύονται και έχουν πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2 = 1{,}4\rho_1$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{5}$ β) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{8}{5}$ γ) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{6}{5}$

12.63) Μία ανοικτή κυβική δεξαμενή, πλευράς α = 8m, είναι γεμάτη με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 m/s^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση

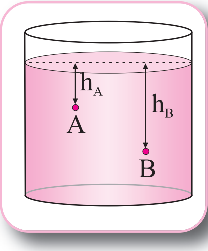
$p_{at} = 10^5 Pa$. Η δύναμη που ασκεί το νερό στον πυθμένα της δεξαμενής έχει μέτρο:

α) $F = 51{,}2 \cdot 10^5 N$

β) $F = 64 \cdot 10^5 N$

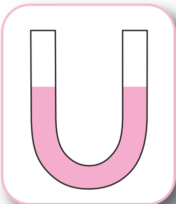
γ) $F = 115{,}2 \cdot 10^5 N$

12.64) Ένα δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας ρ που ισορροπεί. Τα σημεία Α και Β του υγρού βρίσκονται σε βάθη h_A και h_B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν η διαφορά Δp των υδροστατικών πιέσεων στα σημεία Α και Β είναι τριπλάσια από την υδροστατική πίεση στο σημείο Α, ποια σχέση είναι σωστή;



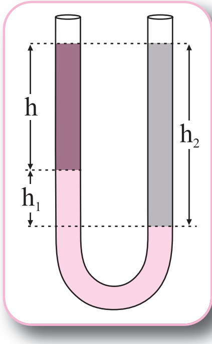
α) $h_B = 4h_A$ β) $h_B = 2h_A$ γ) $h_B = 3h_A$

12.65) Σε ένα γυάλινο δοχείο σχήματος U ισορροπεί νερό πυκνότητας ρ μέχρι τη μέση των δύο σκελών του σωλήνα που έχουν την ίδια διάμετρο. Ρίχνουμε μέσα στο ένα σκέλος του σωλήνα υγρό πυκνότητας $\rho_1 = 0{,}8\rho$, το οποίο, όταν επέλθει ισορροπία, σχηματίζει στήλη ύψους h. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο άλλο σκέλος του σωλήνα θα ανέβει κατά:



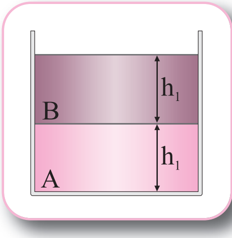
α) $h_1 = \dfrac{2h}{5}$ β) $h_1 = \dfrac{h}{5}$ γ) $h_1 = \dfrac{h}{4}$

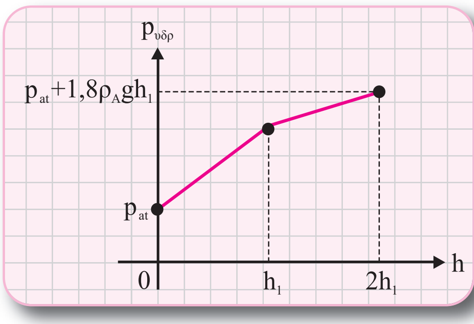
12.66) Σε ένα γυάλινο δοχείο σχήματος U περιέχεται υγρό (1), πυκνότητας $\rho_1 = 13{,}5\rho$, όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού. Στο δεξιό σκέλος του σωλήνα ρίχνουμε υγρό (2), πυκνότητας $\rho_2 = 2\rho$, το οποίο σχηματίζει στήλη ύψους h_2. Στο αριστερό σκέλος του σωλήνα ρίχνουμε νερό μέχρις ότου η ελεύθερη επιφάνεια του νερού και του υγρού (2), αφού επέλθει ισορροπία, να βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Το ύψος h της στήλης του νερού δίνεται από τη σχέση:



α) $h = \dfrac{23}{25}h_2$ β) $h = \dfrac{21}{25}h_2$ γ) $h = \dfrac{19}{25}h_2$

12.67) Στο ανοικτό δοχείο του σχήματος περιέχονται δύο υγρά Α και Β που δεν αναμειγνύονται και έχουν πυκνότητες ρ_A και ρ_B αντίστοιχα. Οι στήλες των δύο υγρών έχουν ίσα ύψη $h_A = h_B = h_1$ και ισορροπούν. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση σε συνάρτηση με το βάθος. Ποια σχέση είναι σωστή;



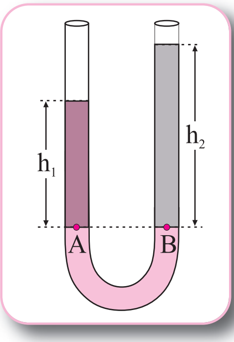


α) $\rho_B = 0{,}8\rho_A$ β) $\rho_B = 0{,}6\rho_A$ γ) $\rho_B = 0{,}4\rho_A$

επίπεδο με το σημείο Β, η επιτάχυνσή του έχει για πρώτη φορά μέτρο $|\alpha| = \frac{\alpha_{max}}{2}$. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση Γ΄, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Γ, η ταχύτητά του είναι μέγιστη. Οι υδροστατικές πιέσεις p_B και p_Γ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση:

α) $p_\Gamma = 2p_B$ β) $p_\Gamma = 4p_B$ γ) $p_\Gamma = 3p_B$

12.73) Ένα δοχείο σχήματος U περιέχει νερό πυκνότητας ρ_ν. Στα δύο σκέλη του σωλήνα ρίχνουμε δύο υγρά (1) και (2) με πυκνότητες $\rho_1 = 0{,}8\rho_\nu$ και $\rho_2 = 0{,}7\rho_\nu$ αντίστοιχα. Οι στήλες των υγρών (1) και (2) έχουν ύψη h_1 και h_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η στάθμη του νερού παραμένει ίδια με αυτή πριν από την προσθήκη των δύο υγρών. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{9}$ β) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{8}$ γ) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{10}$

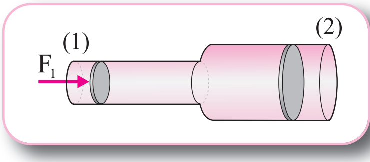
12.74) Ένα δοχείο που περιέχει υγρό κινείται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $\alpha = g$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία:

α) $\hat{\varphi} = 30^o$ β) $\hat{\varphi} = 60^o$ γ) $\hat{\varphi} = 45^o$

12.75) Ένα δοχείο που περιέχει νερό κινείται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 10\sqrt{3}\,m/s^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 m/s^2$. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία:

α) $\hat{\varphi} = 30^o$ β) $\hat{\varphi} = 60^o$ γ) $\hat{\varphi} = 45^o$

12.76) Το δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με ιδανικό υγρό και κλείνεται ερμητικά με δύο έμβολα (1) και (2) που τα εμβαδά τους A_1 και A_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $A_2 = 4A_1$. Κάθετα στην επιφάνεια του εμβόλου (1) ασκείται δύναμη F_1 και το έμβολο μετακινείται κατά ℓ_1. Το έμβολο (2) μετακινείται κατά ℓ_2 που δίνεται από τη σχέση:



α) $\ell_2 = 4\ell_1$ β) $\ell_2 = \ell_1$ γ) $\ell_2 = \frac{\ell_1}{4}$

12.77) Το δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με ιδανικό υγρό και κλείνεται ερμητικά με δύο έμβολα (1) και (2) που τα εμβαδά τους A_1 και A_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $A_2 = 2A_1$. Κάθετα στην επιφάνεια του εμβόλου (1) ασκείται δύναμη F_1 και τα έμβολα (1) και (2) μετακινούνται κατά ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Το έμβολο (2) μετακινείται με σταθερή ταχύτητα. Το έργο της δύναμης F_A που αντιστέκεται στην κίνηση του εμβόλου (2) δίνεται από τη σχέση:

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$.

12.85) Μία ανοικτή δεξαμενή έχει μήκος $\ell_1 = 2m$, πλάτος $\ell_2 = 1,5m$ και βάθος $h = 1,2m$. Εάν η δεξαμενή είναι κατά 75% γεμάτη με νερό που ισορροπεί, να υπολογιστούν:

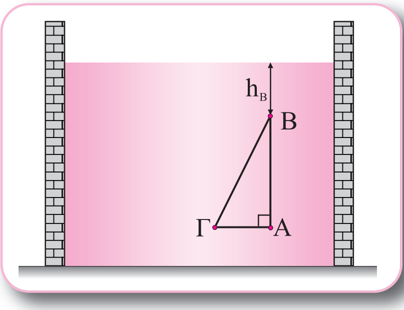
α) η υδροστατική πίεση σε βάθος $h_1 = 0,5m$ από την επιφάνεια του νερού,

β) η υδροστατική πίεση στον πυθμένα της δεξαμενής,

γ) η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας από το νερό.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 kg/m^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$.

12.86) Στο σχήμα φαίνεται η εγκάρσια διατομή μίας μεγάλης δεξαμενής που περιέχει νερό το οποίο ισορροπεί. Τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου για το οποίο γνωρίζουμε ότι ΒΓ = 10m, ΑΓ = 6m και $\hat{A} = 90^o$. Το σημείο Β βρίσκεται σε βάθος $h_B = 2m$.



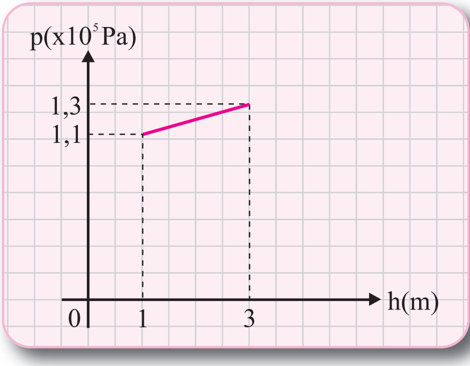
α) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Β.

β) Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Γ.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το βάθος η πίεση στα σημεία του νερού από το σημείο Β ως το σημείο Α.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 kg/m^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$.

12.87) Ένα ανοικτό δοχείο έχει ύψος $h = 4m$ και είναι γεμάτο με νερό που ισορροπεί. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση p στα σημεία του νερού σε συνάρτηση με το βάθος τους h από την επιφάνεια του νερού. Να υπολογιστούν:



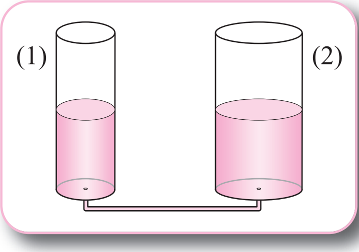
α) η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια του νερού και η πυκνότητα του νερού,

β) η πίεση σε βάθος h΄ = 2m από την επιφάνεια του νερού,

γ) η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου από το νερό, γνωρίζοντας ότι ο πυθμένας του δοχείου έχει εμβαδόν $A = 10^{-2} m^2$.

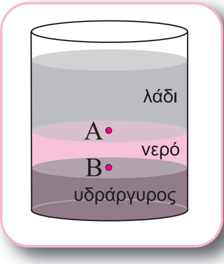
12.88) Τα δοχεία (1) και (2) του σχήματος είναι γεμάτα με νερό και θαλασσινό νερό αντίστοιχα που ισορροπούν. Η υδροστατική πίεση στο μέσο του δοχείου με νερό είναι p = 400Pa. Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση:

ρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5$Pa. Αφού ισορροπήσει το νερό, να υπολογιστούν:



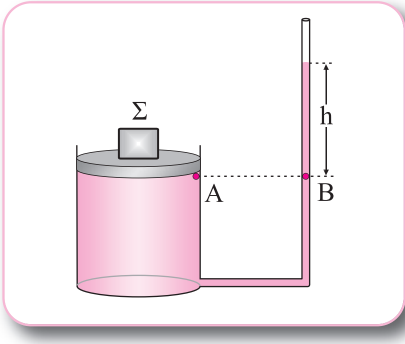
α) η αύξηση του ύψους του νερού σε κάθε δοχείο,
β) η αύξηση του όγκου του νερού σε κάθε δοχείο,
γ) η αύξηση της πίεσης στον πυθμένα κάθε δοχείου.

12.97) Μέσα σε ένα κυλινδρικό δοχείο περιέχονται υδράργυρος, που έχει πυκνότητα $\rho_\upsilon = 13,6 \cdot 10^3$kg/m^3 και σχηματίζει στήλη ύψους $h_\upsilon = 0,4$m, νερό, που έχει πυκνότητα $\rho_\nu = 10^3$kg/m^3 και σχηματίζει στήλη ύψους $h_\nu = 0,2$m, και λάδι, που έχει πυκνότητα $\rho_\lambda = 0,72 \cdot 10^3$kg/m^3 και σχηματίζει στήλη ύψους $h_\lambda = 0,8$m. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5$Pa. Να υπολογιστούν:



α) οι πιέσεις στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ των υγρών,
β) η πίεση στον πυθμένα του δοχείου.

12.98) Ένα κυλινδρικό δοχείο συνδέεται με κατακόρυφο σωλήνα μεγάλου μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γεμίζουμε το δοχείο με νερό και το κλείνουμε με ένα έμβολο μάζας $m_1 = 1$kg και διατομής $A = 0,2$m^2. Πάνω στο έμβολο τοποθετούμε ένα σώμα Σ, μάζας $m_2 = 20$kg. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3$kg/m^3. Να υπολογιστούν:

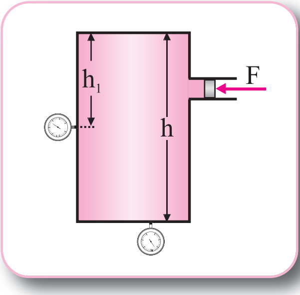


α) η συνολική πίεση λόγω του βάρους του εμβόλου και του σώματος Σ,
β) το ύψος h στο οποίο θα ανέβει το νερό στον σωλήνα πάνω από την επιφάνεια του εμβόλου.

12.99) Ένα δοχείο που περιέχει μέχρι ύψους $h = 1$m νερό πυκνότητας $\rho = 10^3$kg/m^3 τοποθετείται στη βάση ενός ανελκυστήρα. Η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ανελκυστήρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου στις παρακάτω περιπτώσεις όπου ο ανελκυστήρας:
α) κινείται με σταθερή ταχύτητα,
β) ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_1 = 5$m/s^2,
γ) κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_2 = 5$m/s^2,
δ) κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_3 = 10$m/s^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

12.100) Το κλειστό δοχείο του σχήματος έχει ύψος $h = 2m$ και είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί.

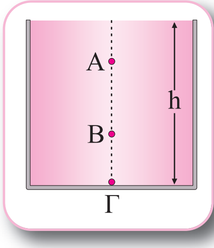


α) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση που μετρά το μανόμετρο σε βάθος $h_1 = 1m$ και στον πυθμένα του δοχείου.

β) Να υπολογιστεί η μεταβολή της υδροστατικής πίεσης που μετρά το μανόμετρο σε βάθος $h_2 = 1{,}4m$, όταν στο έμβολο, που έχει εμβαδόν $A = 10^{-2} m^2$, ασκηθεί σταθερή κάθετη δύναμη με φορά προς το νερό και μέτρο $F = 100N$.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με τη δύναμη που ασκείται στο έμβολο, εάν η δύναμη αυτή έχει μέτρο $F = 10t$ (SI) και ασκείται για χρονικό διάστημα $\Delta t = 10s$.

12.101) Η εγκάρσια διατομή ενός ανοικτού δοχείου είναι το τετράγωνο του σχήματος. Το δοχείο έχει ύψος $h = 8m$ και είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη που διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου και το σημείο Γ είναι στον πυθμένα του δοχείου.



Γνωρίζουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$ και ότι οι πιέσεις στα σημεία Α, Β και Γ συνδέονται με τις σχέσεις:

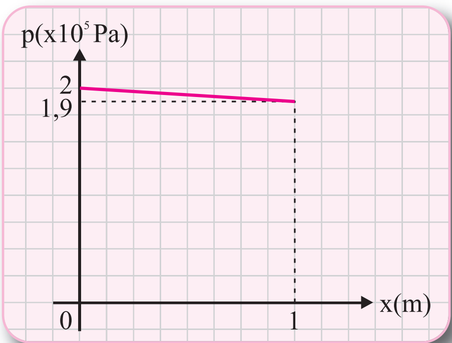
$\dfrac{p_A}{p_B} = \dfrac{11}{17}$ και $\dfrac{p_A}{p_\Gamma} = \dfrac{11}{18}$. Να υπολογιστούν:

α) το βάθος h_A του σημείου Α από την επιφάνεια του νερού,

β) η απόσταση ΑΒ,

γ) η απόσταση d από το άνω αριστερό άκρο του δοχείου ενός σημείου Δ που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με τα σημεία Α, Β και Γ και στο οποίο η πίεση είναι $p_\Delta = 1{,}3 \cdot 10^5 Pa$.

12.102) Μία ποσότητα νερού, ύψους $h = 10m$, ισορροπεί μέσα σε ανοικτό δοχείο. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται πώς μεταβάλλεται η πίεση στα σημεία του νερού σε συνάρτηση με την απόστασή τους από τον πυθμένα του δοχείου.



ζει στήλη ύψους $h_ν = 40cm$ και πάνω από αυτό λάδι που σχηματίζει στήλη ύψους $h_λ = 20cm$. Στο δοχείο (2) ρίχνουμε υδράργυρο που σχηματίζει στήλη ύψους $h_υ = 40cm$. Γνωρίζουμε τις πυκνότητες του υδραργύρου, του νερού και του λαδιού $ρ_υ = 13{,}6 \cdot 10^3 kg/m^3$, $ρ_ν = 10^3 kg/m^3$ και $ρ_λ = 0{,}72 \cdot 10^3 kg/m^3$ αντίστοιχα και ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:

α$_1$) η πίεση στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ λαδιού και νερού,

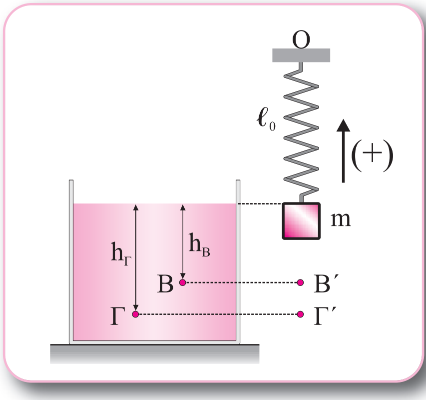
α$_2$) η πίεση στον πυθμένα κάθε δοχείου.

Β. Κάποια χρονική στιγμή ανοίγουμε τη στρόφιγγα.

β$_1$) Να εξηγηθεί ποιο υγρό θα μετακινηθεί και σε ποιο δοχείο.

β$_2$) Να υπολογιστεί το ύψος του υδραργύρου σε κάθε δοχείο.

12.114) Το δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $ρ = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Τα σημεία Β και Γ του υγρού βρίσκονται σε βάθη h_B και $h_Γ$ αντίστοιχα. Δίπλα στο δοχείο υπάρχει κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 400 N/m$, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο και το ελεύθερο άκρο του βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα μάζας $m = 9kg$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν το σώμα διέρχεται από τις θέσεις Β΄ και Γ΄, που βρίσκονται στα ίδια οριζόντια επίπεδα με τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, η κινητική ενέργεια του σώματος και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης συνδέονται την πρώτη φορά με τις σχέσεις $\frac{K_{B'}}{U_{B'}} = 1$ και $\frac{K_{Γ'}}{U_{Γ'}} = \frac{1}{3}$. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$, $\sqrt{2} = 1{,}41$ και $\sqrt{3} = 1{,}73$.



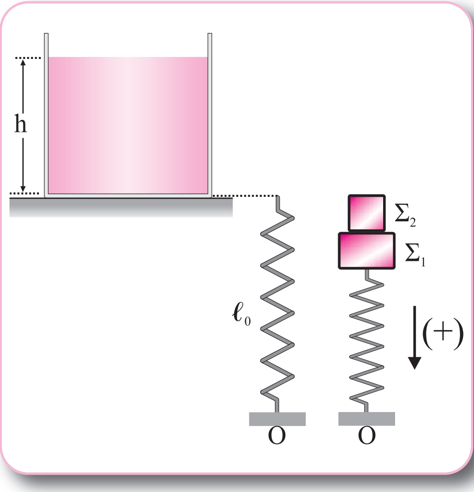
α) Να γραφτεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Να υπολογιστούν τα μέτρα της επιτάχυνσης του σώματος στις θέσεις Β΄ και Γ΄.

γ) Να βρεθούν οι πιέσεις στα σημεία Β και Γ.

δ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Κ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Κ΄, στο οποίο το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς ($|F_{ελ}| = |F_{επ}|$).

12.115) Ένα δοχείο ύψους $h = 1m$ είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας $ρ = 10^3 kg/m^3$ που ισορροπεί. Δίπλα στο δοχείο υπάρχει κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 200 N/m$, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο Ο. Όταν το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το ελεύθερο άκρο του είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον πυθμένα του δοχείου. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δένουμε σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1kg$, πάνω στο οποίο είναι κολλημένο σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 1kg$. Το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί. Εκτρέπουμε το σύστημα των σωμάτων κατά $d = 0{,}4m$ στη θετική φορά και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$.



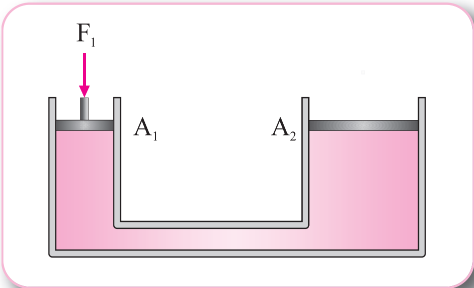
α) Να γραφτεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος των σωμάτων σε συνάρτηση με τον χρόνο.

β) Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Β, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Β΄, για το οποίο ισχύει $x_{B'} = -\dfrac{A}{2}$.

γ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Γ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Γ΄, στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$.

δ) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στο σημείο Δ, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο Δ΄, από το οποίο όταν διέρχεται το σύστημα των δύο σωμάτων η δύναμη επαφής που δέχεται το σώμα Σ_2 έχει αλγεβρική τιμή $F_{\varepsilon\pi} = +20N$.

12.116) Τα εμβαδά A_1 και A_2 των εμβόλων στον υδραυλικό ανυψωτήρα του σχήματος συνδέονται με τη σχέση $A_2 = 4A_1$. Κάθετα στην επιφάνεια του μικρού εμβόλου ασκούμε σταθερή δύναμη μέτρου $F_1 = 200N$, που προκαλεί μετατόπιση του μικρού εμβόλου κατά $s_1 = 20cm$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2s$. Να υπολογιστούν:



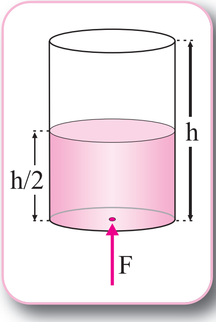
α) η μετατόπιση s_2 του μεγάλου εμβόλου στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t = 2s$,

β) η δύναμη F_2 που ασκείται στο μεγάλο έμβολο,

γ) η μέση ταχύτητα μετατόπισης των δύο εμβόλων,

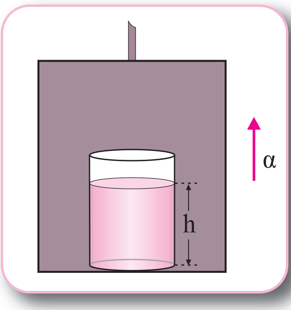
δ) η μέση ισχύς της δύναμης F_1 καθώς και της δύναμης F_2.

12.117) Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα έχει ύψος h και περιέχει νερό μέχρι ύψους $\frac{h}{2}$. Ο πυθμένας του δοχείου μπορεί να μετακινείται κατακόρυφα κατά μήκος των τοιχωμάτων του χωρίς τριβές. Το βάρος του πυθμένα του δοχείου θεωρείται αμελητέο. Αρχίζουμε να μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα τον πυθμένα, ασκώντας σ' αυτόν κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα πάνω. Να υπολογιστεί το έργο της εξωτερικής δύναμης που ασκείται στον πυθμένα μέχρι να χυθεί:



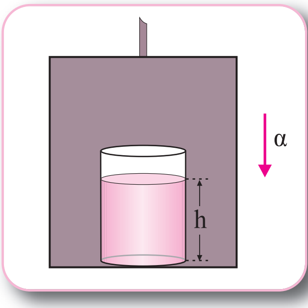
α) το μισό νερό,
β) ολόκληρη η ποσότητα του νερού.

12.118) Στη βάση ενός ανελκυστήρα βρίσκεται κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν πυθμένα $A = 10^{-2}m^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο περιέχει μέχρι ύψους h = 2m νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Ο ανελκυστήρας αρχίζει να ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α. Η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου είναι $p = 4 \cdot 10^4 Pa$. Η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ανελκυστήρα και η μάζα του δοχείου θεωρούνται αμελητέες.



α) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο ανελκυστήρας από το νερό.
β) Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του ανελκυστήρα.
γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με την επιτάχυνση του ανελκυστήρα για τιμές από 0 έως α΄ = 2α.

12.119) Στη βάση ενός ανελκυστήρα βρίσκεται κυλινδρικό δοχείο που έχει εμβαδόν πυθμένα $A = 2 \cdot 10^{-2}m^2$ και περιέχει μέχρι ύψους h = 1m υδράργυρο πυκνότητας $\rho = 13,6 \cdot 10^3 kg/m^3$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0m$ και αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση μέτρου $\alpha = \frac{x}{2}$ SI. Θεωρούμε ότι η μάζα του δοχείου και η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του ανελκυστήρα είναι αμελητέες.

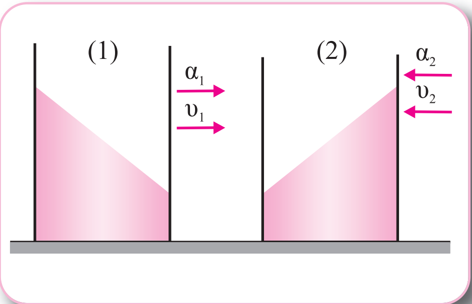


α) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου, όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_1 = 2m$.

β) Να υπολογιστεί η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου, όταν ο ανελκυστήρας βρίσκεται στη θέση $x_1 = 2m$.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με τη θέση του ανελκυστήρα για τιμές από $x_0 = 0m$ έως $x_2 = 10m$.

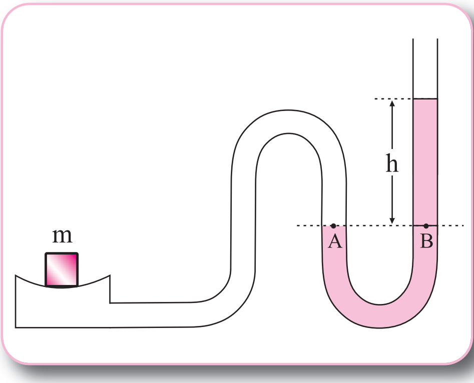
12.120) Δύο δοχεία (1) και (2) περιέχουν νερό και κινούνται επάνω σε οριζόντιο επίπεδο σε αντίθετες κατευθύνσεις με επιταχύνσεις σταθερών μέτρων $\alpha_1 = \frac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$ και α_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι διευθύνσεις των ελεύθερων επιφανειών του νερού στα δύο δοχεία σχηματίζουν γωνία $\varphi = 90^o$. Θεωρούμε ότι τα κατώτερα σημεία των ελεύθερων επιφανειών του νερού στα δύο δοχεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν:



α) η γωνία θ_1 που σχηματίζει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο (1) με το οριζόντιο επίπεδο,

β) το μέτρο α_2 της επιτάχυνσης του δοχείου (2).

12.121) Η πειραματική διάταξη του σχήματος ονομάζεται μανομετρική κάψα. Αποτελείται από ένα μικρό δοχείο (κάψα), του οποίου η ανώτερη επιφάνεια κλείνεται με ελαστική μεμβράνη εμβαδού $A = 16 \cdot 10^{-4} m^2$. Η κάψα συγκοινωνεί με γυάλινο σωλήνα σχήματος U που περιέχει νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Αρχικά η στάθμη του νερού βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στα δύο σκέλη του σωλήνα. Τοποθετούμε επάνω στην ελαστική μεμβράνη σώμα μάζας $m_1 = 160g$.



α) Να υπολογιστεί η πίεση που ασκείται στην ελαστική μεμβράνη λόγω του βάρους του σώματος.

β) Να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα σε συνάρτηση με τη μάζα του σώματος που τοποθετείται στη μεμβράνη για τιμές από $m_0 = 0kg$ έως $m = 4m_1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13ο
ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ - ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ

Όταν ένα ρευστό κινείται, αναπτύσσονται δυνάμεις:

- **τριβής**, μεταξύ των μορίων του (εσωτερική τριβή),
- **συνάφειας**, μεταξύ των μορίων του και των τοιχωμάτων του σωλήνα μέσα στον οποίο περιέχεται.

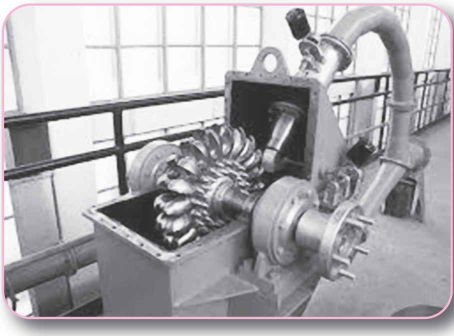
Αν οι παραπάνω δυνάμεις υπερβούν κάποιο όριο, το ρευστό δημιουργεί κατά τη ροή του δίνες και η ροή λέγεται **τυρβώδης** ή **στροβιλώδης**.

Η Saltstraumen στη Νορβηγία είναι η ισχυρότερη δίνη του κόσμου.

Ιδανικό ονομάζεται ένα ρευστό που είναι ασυμπίεστο και δεν παρουσιάζει εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό του, η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι **στρωτή**, δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους.

Στην πραγματικότητα η συμπεριφορά των κινούμενων ρευστών διαφέρει πολύ ή λίγο από τη συμπεριφορά των ιδανικών ρευστών. Για να διακρίνουμε τα υπαρκτά ρευστά από τα ιδανικά, τα ονομάζουμε **πραγματικά ρευστά**.



Η στρωτή ροή έχει εφαρμογή στα δίκτυα ύδρευσης, στα δίκτυα φωταερίου, στους πετρελαιαγωγούς και στην τροφοδότηση των υδροστρόβιλων.

Εάν από τη διατομή A_1 εισέρχεται μεγαλύτερη ποσότητα ρευστού από αυτήν που εξέρχεται από τη διατομή A_2, μεταξύ των δύο διατομών θα έχουμε αύξηση του ρευστού που περιέχεται στον χώρο αυτό. Επειδή όμως τα ρευστά είναι ασυμπίεστα, αυτό είναι αδύνατο. Επομένως: $\Delta m_1 = \Delta m_2$ (1)
Εάν ΔV_1 και ΔV_2 οι στοιχειώδεις όγκοι που καταλαμβάνουν μέσα στον σωλήνα οι μάζες Δm_1 και Δm_2 αντίστοιχα και ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, η σχέση (1) γίνεται: $\rho\Delta V_1 = \rho\Delta V_2$ (2)
Λόγω των σχέσεων $\Delta V = A\Delta x$ και $\Delta x = \upsilon\Delta t$, η σχέση (2) γράφεται:

$\rho A_1\Delta x_1 = \rho A_2\Delta x_2$ ή $\rho A_1\upsilon_1\Delta t = \rho A_2\upsilon_2\Delta t$ ή $\mathbf{A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2}$

Η εξίσωση $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ονομάζεται εξίσωση της συνέχειας και είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ύλης.
Επειδή $\Pi = A\upsilon$, η σχέση $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ γράφεται: $\Pi_1 = \Pi_2$ ή $\Pi =$ σταθερό
Δηλαδή:

Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μίας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή.

Κατά μήκος ενός σωλήνα που έχει σταθερή διατομή η ταχύτητα του ρευστού είναι παντού ίδια. Εάν όμως η διατομή του σωλήνα μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και η ταχύτητα του ρευστού. Σε σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει, η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη. Για παράδειγμα, όπου ένα ποτάμι είναι στενό ή ρηχό, το νερό κυλάει γρηγορότερα. Δηλαδή:

Εκεί όπου οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν, η ταχύτητα ροής είναι πιο μεγάλη.

Όταν στενεύουμε τη διατομή του λάστιχου, σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, αυξάνεται η ταχύτητα ροής του νερού.

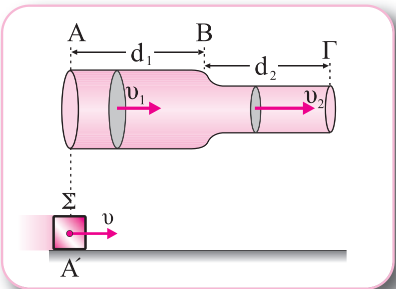
Καθώς πέφτει το νερό, η ταχύτητά του αυξάνεται και επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, η διατομή της φλέβας μειώνεται.

α) $\Pi_Z = 8m^3/s$ β) $\Pi_Z = 4m^3/s$ γ) $\Pi_Z = 2m^3/s$

13.28) Σε μία κατοικία ανοίγουμε μία βρύση (1) με διατομή εμβαδού A_1. Η ταχύτητα ροής του νερού είναι υ_1. Στη συνέχεια ανοίγουμε και μία δεύτερη βρύση (2) με διατομή εμβαδού A_2, οπότε η ταχύτητα ροής του νερού στη βρύση (1) είναι υ_1'. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $\upsilon_1' = \upsilon_1$ β) $\upsilon_1' > \upsilon_1$ γ) $\upsilon_1' < \upsilon_1$

13.29) Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει ιδανικό υγρό. Ο σωλήνας αποτελείται από δύο τμήματα ΑΒ και ΒΓ με ίσα μήκη $d_1 = d_2 = d$ και διατομές εμβαδών A_1 και A_2 αντίστοιχα που συνδέονται με τη σχέση $A_1 = 4A_2$. Οι ταχύτητες του υγρού στα τμήματα ΑΒ και ΒΓ είναι υ_1 και υ_2 αντίστοιχα. Παράλληλα με τον σωλήνα βρίσκεται λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ αρχίζει να κινείται σώμα Σ με σταθερή ταχύτητα υ από το σημείο Α΄ του οριζόντιου επιπέδου και διανύει απόσταση 2d σε χρόνο t. Τον ίδιο χρόνο t χρειάζεται και μία στοιχειώδης ποσότητα υγρού για να φτάσει από το άκρο Α στο άκρο Γ του σωλήνα. Ποια σχέση είναι σωστή;

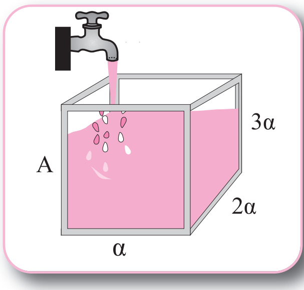


α) $\upsilon = \frac{9}{5}\upsilon_1$ β) $\upsilon = \frac{8}{5}\upsilon_1$ γ) $\upsilon = \frac{6}{5}\upsilon_1$

13.30) Ένας κυλινδρικός σωλήνας συνδέεται με βρύση σταθερής παροχής Π. Με κατάλληλο μηχανισμό η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\delta = \delta_0 - \frac{\delta_0}{2}t$, όπου δ_0 είναι η διάμετρος του σωλήνα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$. Οι ταχύτητες ροής του νερού υ_1 και υ_2 τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0{,}5s$ και $t_2 = 1s$ αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση:

α) $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{2}{9}$ β) $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{4}{9}$ γ) $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{2}{3}$

13.31) Μία βρύση με παροχή $\Pi = 6 \cdot 10^{-4} m^3/s$ γεμίζει με νερό το 40% μίας δεξαμενής σε χρόνο $\Delta t = 30h$. Η δεξαμενή έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β = 2α και γ = 3α. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) α = 5m β) α = 2m γ) α = 3m

13.32) Στον οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα του σχήματος ρέει ιδανικό υγρό. Οι διατομές του σωλήνα στα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διαμέτρους δ_A, $\delta_B = \frac{\delta_A}{2}$, $\delta_\Gamma = \frac{\delta_A}{4}$ και $\delta_\Delta = \frac{\delta_A}{4}$ αντίστοιχα. Οι ταχύτητες ροής του

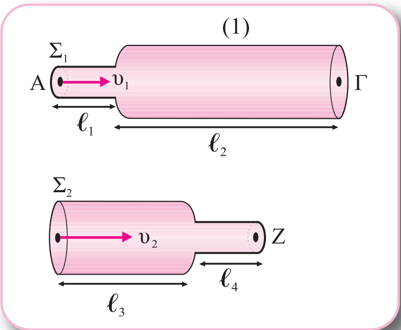
$υ_1$, $υ_2$ και $υ_3$ αντίστοιχα. Εάν τα τρία σωματίδια βρίσκονται συνεχώς στην ίδια ευθεία, οι παροχές των σωλήνων συνδέονται με τη σχέση:

α) $Π_2 = \dfrac{Π_3 - Π_1}{2}$

β) $Π_2 = \dfrac{Π_1 + Π_3}{2}$

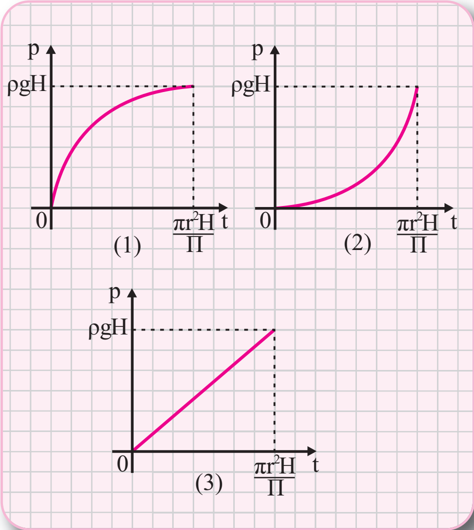
γ) $Π_3 = \dfrac{Π_1 + Π_2}{2}$

13.45) Οι οριζόντιοι σωλήνες (1) και (2) έχουν μήκη $\ell_1=\ell$, $\ell_2=4\ell$, $\ell_3=2\ell$ και $\ell_4=\ell$, διατομές που συνδέονται με τις σχέσεις $A_2 = 4A_1$ και $A_3 = 2A_4$ και διαρρέονται από το ίδιο ιδανικό υγρό. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ διέρχονται από τα σημεία Α και Δ των σωλήνων (1) και (2) σωματίδια $Σ_1$ και $Σ_2$ με ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2 = 2υ_1$ αντίστοιχα. Τα σωματίδια έχουν αμελητέες διαστάσεις και κινούνται μαζί με το υγρό, χωρίς να επηρεάζουν τη ροή του. Οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2, κατά τις οποίες τα σωματίδια $Σ_1$ και $Σ_2$ φτάνουν στα σημεία Γ και Ζ αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση:



α) $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{68}{5}$ β) $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{63}{5}$ γ) $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{61}{5}$

13.46) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ μία βρύση σταθερής παροχής Π αρχίζει να γεμίζει με νερό ένα κυλινδρικό δοχείο ύψους H και ακτίνας r. Θεωρούμε ότι σε όλη τη διάρκεια του γεμίσματος του δοχείου το νερό βρίσκεται σε ισορροπία. Στο διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο η υδροστατική πίεση στον πυθμένα του δοχείου μέχρι να γεμίσει το δοχείο είναι το:

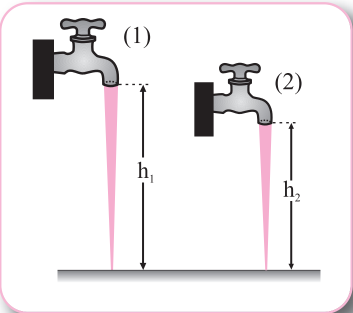


α) (1) β) (2) γ) (3)

13.47) Στο σχήμα δίνονται οι κατευθύνσεις στις οποίες κινείται ένα ιδανικό υγρό σε ορισμένες περιοχές του οριζόντιου σωλήνα. Γνωρίζουμε ότι στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ οι παροχές του σωλήνα είναι $Π_A = x m^3/s$, $Π_B = \dfrac{x}{2} m^3/s$, $Π_Γ = \dfrac{x}{4} m^3/s$, $Π_Δ = 2m^3/s$, $Π_E = (4+x)m^3/s$ και $Π_Z = 3m^3/s$ αντίστοιχα. Ποια σχέση είναι σωστή;

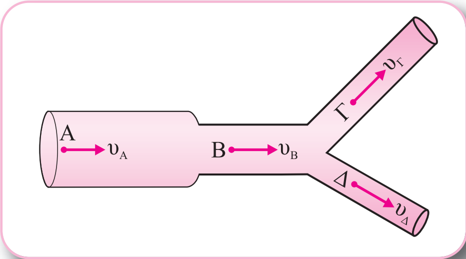
γ) η διάμετρος της φλέβας του νερού τη χρονική στιγμή t_1,
δ) η απόσταση h΄ ενός σημείου Β της φλέβας του νερού από το έδαφος, εάν γνωρίζουμε ότι στο σημείο αυτό για τη διάμετρο της φλέβας του νερού ισχύει η σχέση $\delta_3^2 = 0{,}8\text{cm}^2$.

13.74) Οι βρύσες (1) και (2) του σχήματος έχουν διαμέτρους $\delta_1 = 2\text{cm}$ και $\delta_2 = 3\text{cm}$ αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\text{s}$ αρχίζει να ρέει νερό από τις δύο βρύσες (1) και (2) με ταχύτητες ροής $\upsilon_1 = 0{,}2\text{m/s}$ και $\upsilon_2 = 0{,}1\text{m/s}$ αντίστοιχα. Οι φλέβες του νερού είναι κατακόρυφες και φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Η απόσταση της βρύσης (2) από το έδαφος είναι $h_2 = 5{,}1\text{m}$. Θεωρούμε τις αντιστάσεις του αέρα αμελητέες και ότι το νερό είναι ιδανικό υγρό. Να υπολογιστούν:



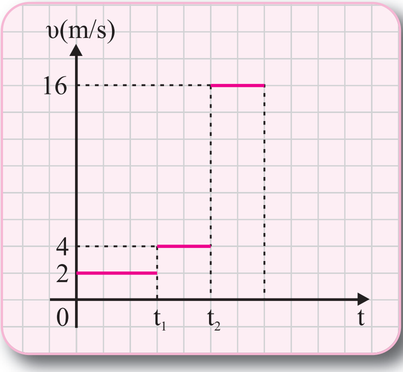
α) οι παροχές των δύο βρυσών,
β) η συνολική ποσότητα νερού που έχει εξέλθει και από τις δύο βρύσες μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10\text{min}$,
γ) η απόσταση h_1 της βρύσης (1) από το έδαφος,
δ) οι ταχύτητες με τις οποίες φτάνουν δύο στοιχειώδεις μάζες του νερού των δύο φλεβών του νερού στο έδαφος.

13.75) Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος ρέει ιδανικό υγρό. Οι διατομές στα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διαμέτρους $\delta_A = 6\text{cm}$, $\delta_B = 4\text{cm}$, $\delta_\Gamma = 3\text{cm}$ και $\delta_\Delta = 2\text{cm}$ αντίστοιχα. Οι ταχύτητες του υγρού στα σημεία Β και Γ είναι $\upsilon_B = 9\text{cm/s}$ και $\upsilon_\Gamma = 6\text{cm/s}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:

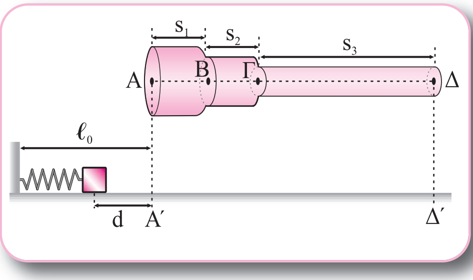


α) η παροχή του σωλήνα στο σημείο Β,
β) η ταχύτητα ροής του υγρού στο σημείο Α,
γ) η ταχύτητα ροής του υγρού στο σημείο Δ,
δ) οι παροχές του σωλήνα στα σημεία Γ και Δ.

13.76) Μία βρύση απέχει απόσταση h από λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο οριζόντιο επίπεδο κινείται σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1\text{kg}$, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 20\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\text{s}$ το σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 1\text{kg}$, που βρίσκεται ακίνητο στο σημείο Β πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Το σημείο Β είναι η βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης $\varphi = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Την ίδια χρονική στιγμή $t_0 = 0\text{s}$ ανοίγουμε τη βρύση, οπότε το νερό αρχίζει να ρέει με ταχύτητα μέτρου νικό ελατήριο σταθεράς k, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, όταν αυτό βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, είναι στο σημείο Α΄, το οποίο είναι



στην ίδια κατακόρυφη με το σημείο Α. Φέρνουμε σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου σώμα Σ, μάζας $m = 4kg$. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $d = 0{,}4m$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σώμα Σ να διανύσει την απόσταση Α΄Δ΄ είναι ίσος με τον χρόνο που χρειάζεται μία στοιχειώδης μάζα υγρού να διανύσει την απόσταση ΑΔ. Να υπολογιστούν:



α) η σχέση των εσωτερικών διαμέτρων των διατομών του σωλήνα στα σημεία Α, Β και Γ,

β) ο χρόνος που απαιτείται, ώστε μία στοιχειώδης μάζα υγρού να διανύσει την απόσταση ΑΔ,

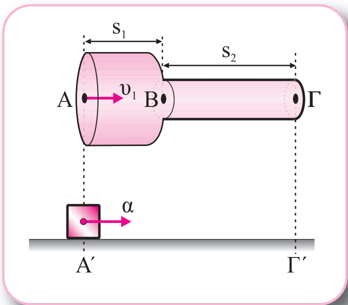
γ) η ταχύτητα του σώματος Σ, όταν χάνει την επαφή του με το ελατήριο,

δ) η σταθερά του ελατηρίου,

ε) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $x = 0{,}2\sqrt{3}\,m$.

13.79) Ο οριζόντιος σωλήνας του σχήματος αποτελείται από δύο τμήματα (1) και (2) με μήκη $s_1 = 2m$ και $s_2 = 4m$ και διαρρέεται από ιδανικό υγρό. Οι διατομές του σωλήνα στα τμήματα (1) και (2) έχουν εσωτερικές ακτίνες r_1 και r_2 που συνδέονται με τη σχέση $r_1 = r_2\sqrt{2}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ διέρχεται από το σημείο Α μία στοιχειώδης μάζα Δm υγρού με ταχύτητα $υ_1 = 2m/s$.

Παράλληλα με τον σωλήνα βρίσκεται λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ από το σημείο Α΄, που είναι στην ίδια κατακόρυφη με το σημείο Α, σώμα Σ που αρχικά είναι ακίνητο αρχίζει να κινείται ομαλά επιταχυνόμενο. Το σώμα Σ φτάνει στο σημείο Γ΄, που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το σημείο Γ, την ίδια χρονική στιγμή που η



σημεία Α και Β των τμημάτων (1) και (2) αντίστοιχα βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή. Ο σωλήνας Σ_1 συγκοινωνεί με δεύτερο οριζόντιο σωλήνα Σ_2 με διατομή εμβαδού $A_3 = 20cm^2$ μέσω δύο στενών κατακόρυφων σωλήνων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο εσωτερικό του σωλήνα Σ_2 υπάρχει έμβολο που ισορροπεί ενωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 120N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα ροής του νερού στο τμήμα (1) του σωλήνα,

β) η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Α και Β,

γ) η συσπείρωση του ελατηρίου,

δ) η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Απάντηση

α) Υπολογισμός της ταχύτητας ροής υ_1

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας στα τμήματα (1) και (2) του οριζόντιου σωλήνα, έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad ή \quad \upsilon_1 = \frac{A_2}{A_1}\upsilon_2 \quad ή \quad \boldsymbol{\upsilon_1 = 2m/s}$$

β) Υπολογισμός της διαφοράς πίεσης

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Α και Β του οριζόντιου σωλήνα που ανήκουν στην ίδια ρευματική γραμμή, έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad ή \quad p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \quad ή \quad \boldsymbol{p_A - p_B = 6 \cdot 10^3 Pa}$$

γ) Υπολογισμός της συσπείρωσης του ελατηρίου

Στο έμβολο ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$ και οι δυνάμεις F_1 και F_2.

Εφόσον το έμβολο ισορροπεί, ισχύει:

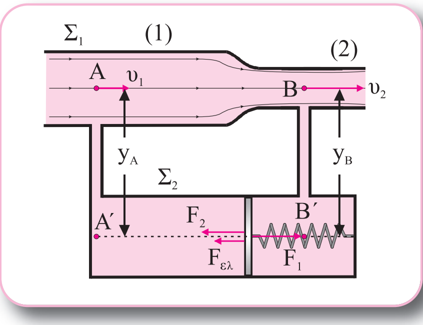
$\Sigma\vec{F} = 0 \quad ή \quad F_{ελ} + F_2 - F_1 = 0 \quad ή$

$F_{ελ} + p_{B'}A_3 - p_{A'}A_3 = 0 \quad ή$

$F_{ελ} = (p_{A'} - p_{B'})A_3 \quad ή$

$F_{ελ} = (p_A + \rho g y_A - p_B - \rho g y_B)A_3 \quad ή$

$F_{ελ} = (p_A - p_B)A_3 \quad ή \quad F_{ελ} = 12N$



Η συσπείρωση του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

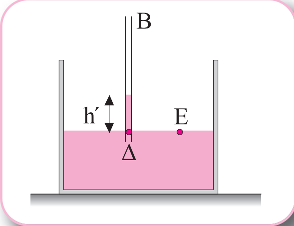
$$F_{ελ} = kx \quad ή \quad x = \frac{F_{ελ}}{k} \quad ή \quad \boldsymbol{x = 0{,}1m}$$

γ) Έλεγχος της λειτουργίας του ψεκαστήρα

Για να λειτουργεί ο ψεκαστήρας, πρέπει το νερό να ανέρχεται μέχρι το ανώτερο σημείο του κατακόρυφου σωλήνα.

Ο ψεκαστήρας λειτουργεί, εάν το νερό ανέρχεται μέχρι το ανώτερο σημείο του σωλήνα $Σ_2$.

Έστω ότι το νερό ανέρχεται σε ύψος h΄ πάνω από το σημείο Δ. Στα σημεία Δ και Ε η πίεση είναι ίδια. Επομένως:

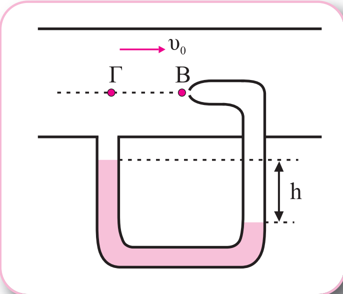


$$p_Δ = p_E \quad ή \quad p_B + ρ_ν g h΄ = p_{at} \quad ή$$

$$p_{at} - \frac{1}{2}ρ_α υ^2 + ρ_ν g h΄ = p_{at} \quad ή \quad h΄ = \frac{ρ_α υ^2}{2ρ_ν g} \quad ή \quad h΄ = 9{,}6\text{cm}$$

Επειδή h΄ < h = 20cm, **ο ψεκαστήρας δε λειτουργεί**.

14.12) Η διάταξη του σχήματος (σωλήνας Pitot) χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του αέρα. Στον σωλήνα σχήματος U περιέχεται νερό πυκνότητας $ρ_ν = 10^3 kg/m^3$. Η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα U είναι h = 2cm. Δίνονται η πυκνότητα του αέρα $ρ_α = 1 kg/m^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.



α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα $υ_0$ του αέρα.

β) Να υπολογιστεί το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ταχύτητας του αέρα, ώστε η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του νερού στα δύο σκέλη να αυξηθεί κατά 300%.

γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα U σε συνάρτηση με το τετράγωνο της ταχύτητας του αέρα για τιμές της ταχύτητας από 20m/s έως 40m/s.

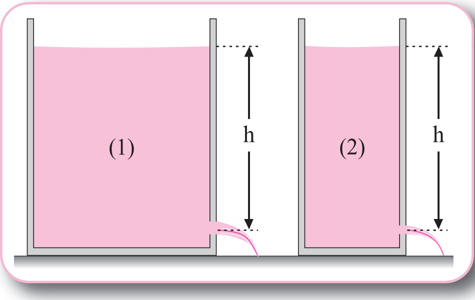
Απάντηση

α) Υπολογισμός της ταχύτητας του αέρα

Στο σημείο Β η ροή του αέρα ανακόπτεται, δηλαδή τα μόρια του αέρα κινούμενα προς το σημείο Β επιβραδύνονται και τελικά σταματούν στο σημείο Β. Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Β και Γ που βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή, έχουν μηδενική υψομετρική διαφορά και είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους, έχουμε:

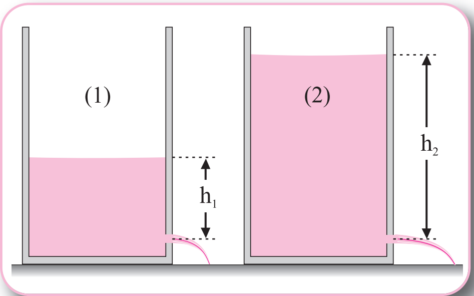
τητας ροής του υγρού ($υ_2^2$) στο τμήμα (2) του σωλήνα. Η πυκνότητα του υγρού είναι:
α) $ρ = 10^3 kg/m^3$
β) $ρ = 2 \cdot 10^3 kg/m^3$
γ) $ρ = 0{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3$

14.25) Στα δοχεία (1) και (2) του σχήματος περιέχεται το ίδιο ιδανικό υγρό. Στο ίδιο βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει στόμιο εκροής και στα δύο δοχεία. Εάν οι διατομές A_1 και A_2 των δοχείων (1) και (2) αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $A_1 > A_2$, οι ταχύτητες εκροής $υ_1$ και $υ_2$ του υγρού από τα στόμια των δύο δοχείων συνδέονται με τη σχέση:



α) $υ_1 = υ_2$ β) $υ_1 > υ_2$ γ) $υ_1 < υ_2$

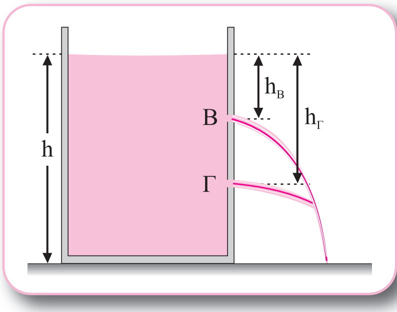
14.26) Στα δοχεία (1) και (2) του σχήματος περιέχεται το ίδιο ιδανικό υγρό. Σε βάθος $h_1 = h$ και $h_2 = 2h$ από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει στόμιο εκροής



και στα δύο δοχεία (1) και (2) αντίστοιχα. Οι ταχύτητες εκροής $υ_1$ και $υ_2$ του υγρού από τα στόμια των δύο δοχείων συνδέονται με τη σχέση:

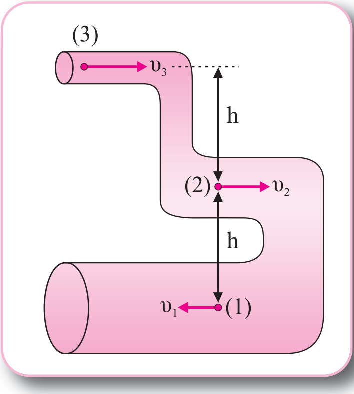
α) $υ_1 = υ_2$ β) $υ_1 = υ_2\sqrt{2}$ γ) $υ_1 = \dfrac{υ_2\sqrt{2}}{2}$

14.27) Στο δοχείο του σχήματος περιέχεται ιδανικό υγρό μέχρι ύψους h. Στα σημεία Β και Γ του τοιχώματος του δοχείου, που απέχουν αποστάσεις $h_B = \dfrac{h}{3}$ και $h_Γ = \dfrac{2h}{3}$ αντίστοιχα από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, έχουμε ανοίξει δύο τρύπες. Θεωρούμε ότι οι στοιχειώδεις μάζες της φλέβας του υγρού που ρέει από τις τρύπες εκτελούν οριζόντια βολή. Εάν αφήσουμε το υγρό να ρέει μόνο από την τρύπα στο σημείο Β, απαιτείται χρονικό διάστημα $Δt_B$, ώστε μία στοιχειώδης μάζα υγρού να φτάσει από το σημείο Β στο έδαφος. Εάν αφήσουμε το υγρό να ρέει μόνο από την τρύπα στο σημείο Γ, απαιτείται χρονικό διάστημα $Δt_Γ$, ώστε μία στοιχειώδης μάζα υγρού να φτάσει από το σημείο Γ στο έδαφος. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) $\dfrac{Δt_B}{Δt_Γ} = \sqrt{2}$ β) $\dfrac{Δt_B}{Δt_Γ} = 2$ γ) $\dfrac{Δt_B}{Δt_Γ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A_3 στα σημεία (1), (2) και (3) του σωλήνα αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις $A_2 = \frac{A_1}{2}$ και $A_3 = \frac{A_1}{3}$. Ποια σχέση είναι σωστή;

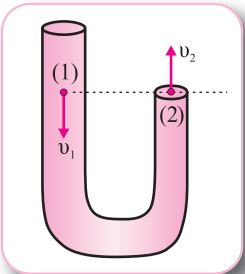


α) $p_1 - p_2 = \frac{3}{2}ρυ_1^2 + 2ρgh$

β) $p_1 - p_3 = 4ρυ_1^2 + 2ρgh$

γ) $p_2 - p_3 = \frac{5}{4}ρυ_1^2 + ρgh$

14.69) Στον κατακόρυφο σωλήνα του σχήματος, ρέει ιδανικό υγρό. Τα σημεία (1) και (2) βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Το σημείο (2) είναι στο άκρο του σωλήνα. Η πίεση στο σημείο (1) είναι κατά 20% μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού $\left(\frac{ΔK}{ΔV}\right)$ μεταξύ των σημείων (1) και (2) είναι:

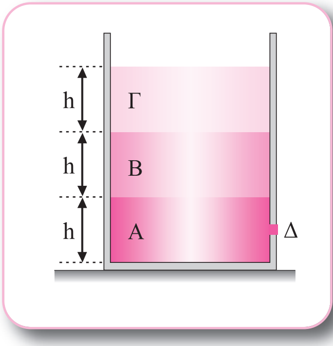


α) $\frac{ΔK}{ΔV} = 0{,}8p_{at}$

β) $\frac{ΔK}{ΔV} = 1{,}2p_{at}$

γ) $\frac{ΔK}{ΔV} = 0{,}2p_{at}$

14.70) Σε ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο περιέχονται υγρό Α πυκνότητας $ρ_A$, υγρό Β πυκνότητας $ρ_B = 0{,}8ρ_A$ και υγρό Γ πυκνότητας $ρ_Γ = 0{,}7ρ_A$ που δεν αναμειγνύονται μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι στήλες των τριών υγρών έχουν ίσο ύψος h. Στο σημείο Δ στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και σε ύψος $\frac{h}{2}$ από τον πυθμένα του δοχείου ανοίγουμε μία οπή με εμβαδόν A_1 πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της διατομής του δοχείου. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ αρχίζει να εκρέει υγρό Α από την οπή. Η παροχή της οπής τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ υπολογίζεται από τη σχέση:



α) $Π = 2A_1\sqrt{gh}$

β) $Π = A_1\sqrt{2gh}$

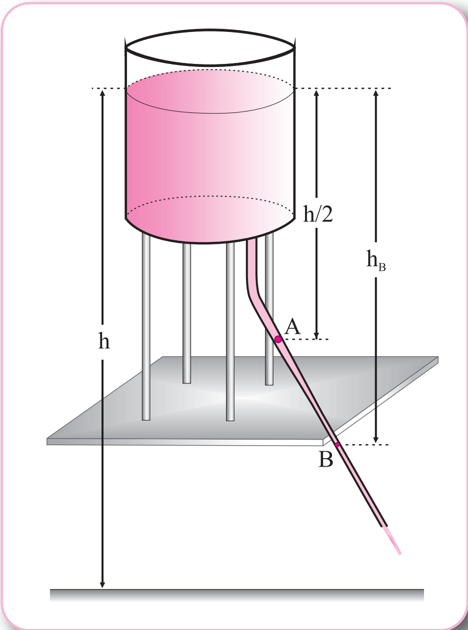
γ) $Π = A_1\sqrt{gh}$

α) η οριζόντια μετατόπιση της στοιχειώδους μάζας του νερού, όταν αυτή φτάνει στο έδαφος,
β) η ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας του νερού, ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος,
γ) η παροχή του αγωγού.

14.77) Ένας υδροστρόβιλος έχει συντελεστή απόδοσης α = 0,6. Για τη λειτουργία του ο υδροστρόβιλος εκμεταλλεύεται τη φλέβα νερού ενός ποταμού, όπου η ταχύτητα ροής του νερού είναι $υ = 8m/s$. Η διατομή της φλέβας είναι $A_1 = 6m^2$ και η πυκνότητα του νερού $ρ = 10^3 kg/m^3$.
α) Να υπολογιστεί η ισχύς που παρέχει το νερό στον υδροστρόβιλο και να κατασκευαστεί το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ισχύς σε συνάρτηση με τη διατομή της φλέβας του νερού για τιμές από $A_1 = 6m^2$ έως $A_2 = 12m^2$.
β) Να υπολογιστεί η ισχύς του υδροστρόβιλου.

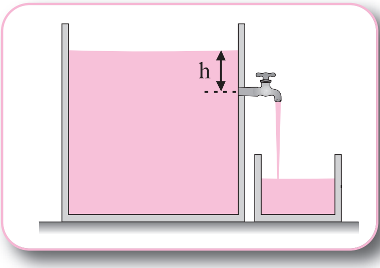
14.78) Α. Ανοικτή δεξαμενή περιέχει νερό μέχρι ύψους $h_1 = 0{,}8m$. Στον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει βρύση με στόμιο εμβαδού $A_1 = 1cm^2$. Το ύψος του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερό. Να υπολογιστούν:
$α_1$) η ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό από τη βρύση,
$α_2$) ο χρόνος που απαιτείται ώστε να γεμίσει ένα δοχείο όγκου $V = 4 \cdot 10^{-3} m^3$ με το νερό που ρέει από τη βρύση.
Β. Αλλάζουμε τη βρύση με άλλη, το στόμιο της οποίας έχει κατά 20% μεγαλύτερο εμβαδόν από την πρώτη, ενώ το νερό στη δεξαμενή φτάνει σε ύψος $h_2 = 1{,}8m$. Να υπολογιστούν τα ποσοστά στα εκατό της μεταβολής:
$β_1$) της παροχής των δύο βρυσών,
$β_2$) του χρόνου που απαιτείται για να γεμίσει το ίδιο δοχείο.

14.79) Μία ανοικτή δεξαμενή νερού, μεγάλου όγκου, βρίσκεται ψηλά πάνω από το έδαφος. Η στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος $h = 10{,}4m$ πάνω από το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από τον πυθμένα της δεξαμενής ξεκινάει σωλήνας μεταβλητής διατομής. Η πίεση σε κάποιο σημείο Α του σωλήνα που βρίσκεται σε απόσταση $\frac{h}{2}$ από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι $p_A = 1{,}2 \cdot 10^5 Pa$. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$ και η πυκνότητα του νερού $ρ = 10^3 kg/m^3$. Να υπολογιστούν:



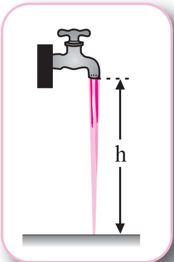
γ) οι διατομές της φλέβας του νερού στα σημεία Γ και Δ.

14.96) Μία ανοικτή δεξαμενή περιέχει νερό. Στο πλευρικό τοίχωμα της δεξαμενής και σε βάθος h = 0,8m από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού υπάρχει βρύση διατομής $A = 0{,}4cm^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε χρονικό διάστημα Δt = 50s η βρύση γεμίζει κυβικό δοχείο με ακμή α. Θεωρούμε ότι κατά τη διάρκεια του γεμίσματος του δοχείου η στάθμη του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερή. Να υπολογιστούν:



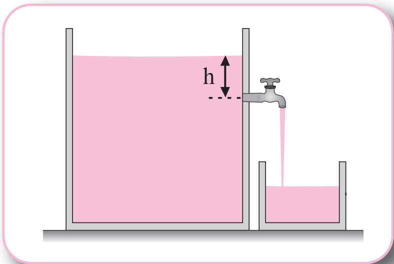
α) η ταχύτητα εκροής του νερού από τη βρύση,
β) η παροχή της βρύσης,
γ) η ακμή α του κύβου.

14.97) Από τη βρύση του σχήματος, που απέχει απόσταση h από το έδαφος, ρέει νερό. Η ταχύτητα του νερού κοντά στο στόμιο της βρύσης και ακριβώς πριν το νερό φτάσει στο έδαφος έχει μέτρα $υ_1$ = 1,8m/s και $υ_2$ = 3m/s αντίστοιχα. Η διατομή της φλέβας σε απόσταση h΄ = 12,6cm από το στόμιο της βρύσης είναι $A΄ = 1cm^2$. Να υπολογιστούν:



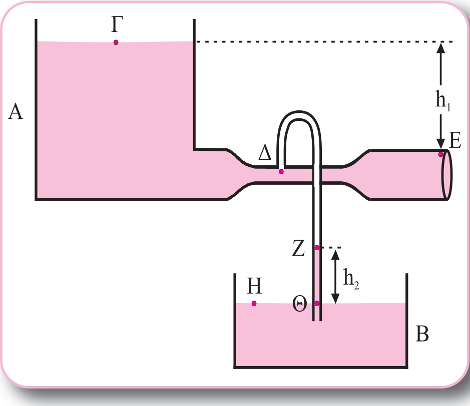
α) η απόσταση h της βρύσης από το έδαφος,
β) η παροχή Π της βρύσης,
γ) οι διατομές A_1 και A_2 της φλέβας του νερού κοντά στο στόμιο της βρύσης και ακριβώς πριν φτάσει στο έδαφος αντίστοιχα.

14.98) Μία ανοικτή δεξαμενή περιέχει νερό. Στο πλευρικό τοίχωμα της δεξαμενής και σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού υπάρχει βρύση διατομής $A = 0{,}6cm^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε χρονικό διάστημα Δt = 100s η βρύση γεμίζει δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α = 10cm, β = 20cm και γ = 90cm. Θεωρούμε ότι κατά τη διάρκεια του γεμίσματος του δοχείου η στάθμη του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερή. Να υπολογιστούν:



α) η παροχή της βρύσης,
β) η ταχύτητα εκροής του νερού από τη βρύση,
γ) το βάθος h στο οποίο βρίσκεται η βρύση.

14.99) Μία ανοικτή δεξαμενή περιέχει μέχρι ύψους h νερό. Στο πλευρικό τοίχωμα της δεξαμενής και σε ύψος h_1 = 3,2m από τον πυθμένα της, όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει μικρή οπή με διατομή $A=2{,}25 \cdot 10^{-4}m^2$ και παροχή $Π=13{,}5 \cdot 10^{-4}m^3/s$.



$h_1 = 0{,}2$m. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5$Pa. Να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα ροής του νερού στην περιοχή του σημείου Ε,

β) η ταχύτητα ροής του νερού στην περιοχή του σημείου Δ,

γ) η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Δ και Ε και η πίεση στο σημείο Δ,

δ) το ύψος h_2 της στήλης του νερού στον στενό σωλήνα πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο Β.

14.122) Μία ανοικτή δεξαμενή περιέχει μέχρι ύψους h = 5,45m νερό. Σε ένα σημείο του πλευρικού τοιχώματος της δεξαμενής ανοίγουμε οπή εμβαδού $A = 10^{-4}m^2$. Η δεξαμενή τροφοδοτείται κατάλληλα, ώστε η στάθμη του νερού να διατηρείται σταθερή.

Α. Εάν η οπή ανοιχτεί σε βάθος h_1 από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, η ταχύτητα εκροής του νερού έχει μέτρο υ = 3m/s. Να υπολογιστούν:

$α_1$) το βάθος h_1,

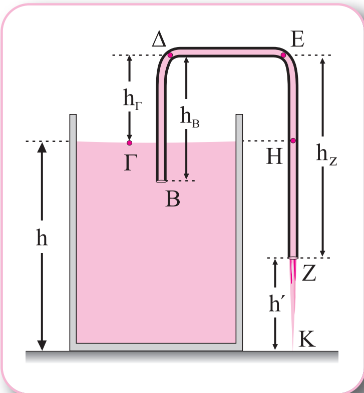
$α_2$) ο λόγος $\frac{x}{y}$ της οριζόντιας προς την κατακόρυφη μετατόπιση μίας στοιχειώδους μάζας νερού που έχει εξέλθει από την οπή, όταν η ταχύτητά της έχει μέτρο $υ_1 = \sqrt{73}$ m/s.

Β. Εάν η οπή ανοιχτεί σε απόσταση h_2 από το έδαφος, έχουμε τη μέγιστη ποσότητα νερού από τη στιγμή εξόδου της φλέβας από την οπή μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Να υπολογιστούν:

$β_1$) η μέγιστη ποσότητα του νερού σε m^3,

$β_2$) η απόσταση h_2.

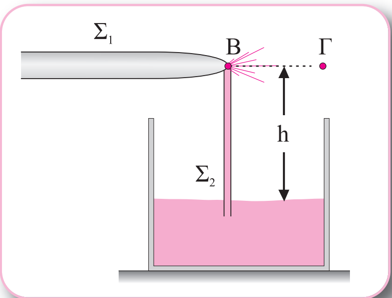
14.123) Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει μέχρι ύψους h = 1,25m νερό πυκνότητας $ρ = 10^3 kg/m^3$. Το νερό μπορεί να εξέρχεται από τη δεξαμενή μέσω του σωλήνα του σχήματος (σίφωνας) που έχει σταθερή διατομή $A = 4 \cdot 10^{-3} m^2$. Αρχικά ο σωλήνας είναι γεμάτος νερό και τα δύο του άκρα είναι κλειστά. Ανοίγουμε τα άκρα του σωλήνα και το νερό αρχίζει να εξέρχεται από τη δεξαμενή. Γνωρίζουμε ότι $h_Γ = 0{,}55$m, $h_B = 0{,}6$m και $h_Z = 1$m. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5$Pa και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$. Να υπολογιστούν:



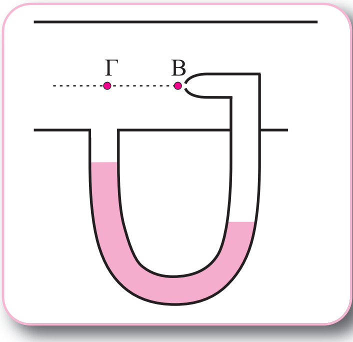
α) οι ταχύτητες ροής του νερού στα σημεία Ζ, Δ, Ε και Η,

β) οι πιέσεις στα σημεία Δ και Η,
γ) η ταχύτητα με την οποία φτάνει το νερό στο έδαφος,
δ) η διατομή της φλέβας, όταν φτάνει στο έδαφος.

14.124) Η διάταξη του σχήματος λειτουργεί ως ψεκαστήρας. Στον οριζόντιο σωλήνα $Σ_1$, που καταλήγει σε μικρή οπή Β, διαβιβάζεται ρεύμα αέρα. Η ταχύτητα του αέρα στην οπή Β έχει μέτρο $υ_B = 10m/s$. Πολύ κοντά στην οπή βρίσκεται το άκρο κατακόρυφου σωλήνα $Σ_2$, το άλλο άκρο του οποίου είναι βυθισμένο σε νερό. Η κορυφή του σωλήνα $Σ_2$ είναι σε ύψος h πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Δίνονται η πυκνότητα του αέρα $ρ_α = 1{,}2kg/m^3$, η πυκνότητα του νερού $ρ_ν = 10^3kg/m^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5Pa$. Να υπολογιστούν:
α) η πίεση του αέρα στο σημείο Β,
β) το ελάχιστο ύψος h, ώστε να λειτουργεί ο ψεκαστήρας εάν η ταχύτητα του αέρα στην οπή είναι $υ'_B = 50m/s$,
γ) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της πίεσης στο σημείο Β, εάν η ταχύτητα του αέρα αυξηθεί κατά 50% σε σχέση με την ταχύτητα $υ_B = 10m/s$.

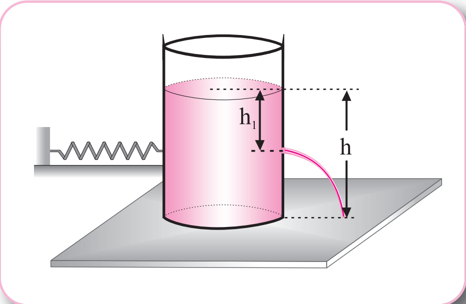


14.125) Α. Η διάταξη του σχήματος (σωλήνας Pitot) χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του αέρα. Τα σκέλη του σωλήνα Σ σχήματος U έχουν ίσες διατομές $A_1 = A_2 = A = 20cm^2$. Ο σωλήνας Σ περιέχει νερό μάζας m = 0,8kg. Αρχικά ο αέρας πάνω από τον σωλήνα Σ είναι ακίνητος. Δίνονται η πυκνότητα του νερού $ρ_ν = 10^3kg/m^3$ και η πυκνότητα του αέρα $ρ_α = 1{,}2kg/m^3$. Να υπολογιστεί το ύψος της στήλης του νερού σε κάθε σκέλος του σωλήνα Σ.



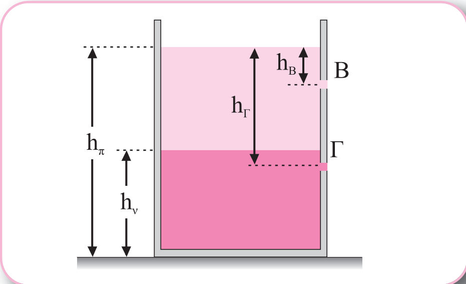
Β. Κάποια χρονική στιγμή ο αέρας πάνω από τον σωλήνα Σ αρχίζει να κινείται.
$β_1$) Εάν η ταχύτητα ροής του αέρα είναι $υ_1 = 60m/s$, να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά $Δh_1$ στη στάθμη του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα Σ.
$β_2$) Εάν η υψομετρική διαφορά στη στάθμη του νερού στα δύο σκέλη του σωλήνα Σ είναι $Δh_2 = 9{,}6 \cdot 10^{-2}m$, να υπολογιστεί η ταχύτητα $υ_2$ του αέρα.
Γ. Εάν η ταχύτητα ροής του αέρα μηδενιστεί, να αποδειχθεί ότι το νερό που βρίσκεται στον σωλήνα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί η περίοδός της.

14.126) Ένα κυλινδρικό δοχείο με βάση εμβαδού $A = 1m^2$ και κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει μέχρι ύψους $h = 1m$ νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Το δοχείο βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή οριακής στατικής τριβής μ_S. Σε βάθος $h_1 = 0{,}5m$ από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού ανοίγουμε οπή εμβαδού $A_1 = 10^{-3} m^2$. Το βάρος του δοχείου θεωρείται αμελητέο. Στο ίδιο ύψος στο οποίο έχει ανοιχτεί η οπή αλλά σε αντιδιαμετρικό σημείο του πλευρικού τοιχώματος του δοχείου είναι ενωμένο το ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 800N/m$ που είναι επιμηκυμένο κατά $x = 0{,}2m$. Όταν αρχίσει να εκρέει το νερό από την οπή, το σύστημα ισορροπεί οριακά. Να υπολογιστούν:



α) η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο δοχείο,
β) η δύναμη που δέχεται το νερό, όταν εξέρχεται από την οπή,
γ) ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής.

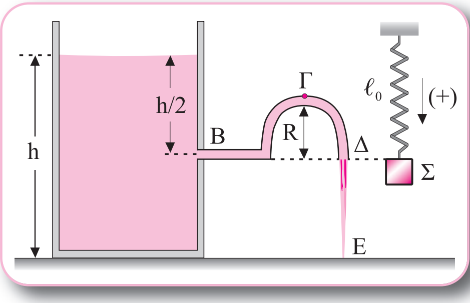
14.127) Ένα ανοικτό κυλινδρικό δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το δοχείο περιέχει μέχρι ύψους $h_\nu = 0{,}5m$ νερό πυκνότητας $\rho_\nu = 10^3 kg/m^3$ και πάνω από αυτό μέχρι ύψους $h_\pi = 1m$ πετρέλαιο πυκνότητας $\rho_\pi = 0{,}8 \cdot 10^3 kg/m^3$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου, στα σημεία Β και Γ, που απέχουν αποστάσεις $h_B = 0{,}2m$ και $h_\Gamma = 0{,}55m$ από την ελεύθερη επιφάνεια του πετρελαίου, ανοίγουμε οπές (1) και (2) αντίστοιχα με εμβαδά A_B και A_Γ που συνδέονται με τη σχέση $A_B = 2A_\Gamma$. Τα εμβαδά των δύο οπών είναι πολύ μικρότερα από το εμβαδόν του πυθμένα του δοχείου. Ανοίγουμε πρώτα την οπή (1) με κλειστή την οπή (2). Στη συνέχεια κλείνουμε την οπή (1) και ανοίγουμε την οπή (2). Να υπολογιστούν:



α) οι ταχύτητες εκροής των υγρών από τις οπές (1) και (2),
β) ο λόγος των παροχών των οπών,
γ) ο λόγος των ταχυτήτων με τις οποίες δύο στοιχειώδεις μάζες νερού και πετρελαίου που εξέρχονται από τις δύο οπές φτάνουν στο οριζόντιο επίπεδο.

14.128) Α. Ένα κυλινδρικό δοχείο βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και περιέχει μέχρι ύψους $h = 0{,}9m$ νερό πυκνότητας

$\rho = 10^3 kg/m^3$. Στο σημείο Β του πλευρικού τοιχώματος του δοχείου και σε βάθος $\frac{h}{2}$ από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού ανοίγουμε μικρή οπή στην οποία συνδέουμε σωλήνα ΒΔ σταθερής διατομής. Το πρώτο τμήμα του σωλήνα είναι οριζόντιο, ενώ στη συνέχεια ο σωλήνας έχει ημικυκλικό σχήμα ακτίνας $R = \frac{h}{3}$. Το σημείο Γ είναι το ανώτερο σημείο του ημικυκλικού τμήματος του σωλήνα. Με κατάλληλο μηχανισμό η στάθμη του νερού στο δοχείο παραμένει σταθερή. Δίπλα στο δοχείο υπάρχει κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 400N/m$, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα, ενώ στο άλλο του άκρο είναι δεμένο σώμα Σ, μάζας m. Το σώμα Σ συγκρατείται στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, το οποίο είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το άκρο Δ του σωλήνα. Δίνονται $\pi^2 = 10$, $\sqrt{2} = 1{,}41$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at} = 10^5 Pa$. Να υπολογιστούν:



α_1) η ταχύτητα εκροής του υγρού από το σημείο Δ,

α_2) οι πιέσεις του νερού στα σημεία Β και Γ,

α_3) η ταχύτητα με την οποία φτάνει το νερό στο έδαφος.

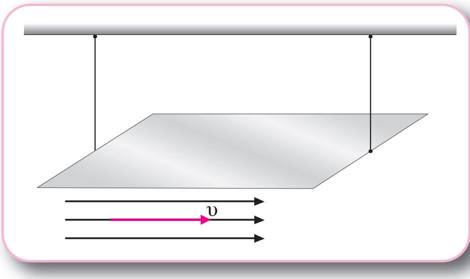
Β. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία αρχίζει να εκρέει νερό από το άκρο Δ του σωλήνα αφήνουμε το σώμα Σ από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα Σ και το νερό φτάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Το σώμα Σ φτάνει στο έδαφος με μηδενική ταχύτητα.

β_1) Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή t_1 που θα φθάσει το νερό στο έδαφος

β_2) Να υπολογιστούν η μάζα και η περίοδος του σώματος Σ

β_3) Να γραφεί η σχέση της ταχύτητας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

14.129) Μία γυάλινη πλάκα έχει διαστάσεις $\alpha = 2m$ και $\beta = 5m$, αμελητέο πάχος και μάζα $m = 10kg$. Η πλάκα ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια δύο κατακόρυφων αβαρών και μη εκτατών νημάτων που είναι δεμένα με αυτή και τα άλλα τους άκρα είναι στερεωμένα σε σταθερό οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το όριο θραύσης των νημάτων είναι $T_{\theta\rho} = 5.342N$. Κάτω από την πλάκα εκτοξεύουμε οριζόντιο ρεύμα αέρα πυκνότητας $\rho = 1{,}2kg/m^3$ με ταχύτητα $\upsilon = 20m/s$ και η πλάκα ισορροπεί. (Δίνεται $p_{at} = 10^5 Pa$)



α) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του αέρα κάτω από την πλάκα.

β) Να υπολογιστούν οι τάσεις των νημάτων.

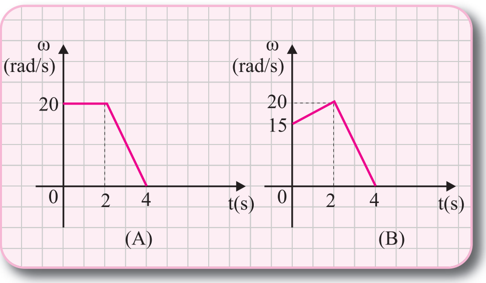
16.44) Δύο στερεά σώματα εκτελούν ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Τα μέτρα των γωνιακών επιβραδύνσεων των στερεών συνδέονται με τη σχέση $\alpha_2 = 4\alpha_1$, ενώ για τις αρχικές γωνιακές ταχύτητες των στερεών ισχύει $\omega_{0_2} = 2\omega_{0_1}$. Ποια πρόταση είναι σωστή;

α) Ο αριθμός των περιστροφών που θα διαγράψουν τα δύο σώματα μέχρι να σταματήσουν είναι ίδιος.

β) Οι χρόνοι που θα κινηθούν τα σώματα μέχρι σταματήσουν είναι ίσοι.

γ) Εάν τα δύο σώματα κινούνται το ένα δεξιόστροφα και το άλλο αριστερόστροφα, τα διανύσματα της γωνιακής επιτάχυνσης έχουν την ίδια κατεύθυνση.

16.45) Δύο όμοιοι ομογενείς δίσκοι Α και Β περιστρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες περιστροφής. Η γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται από τις γραφικές παραστάσεις. Ποια πρόταση είναι σωστή;

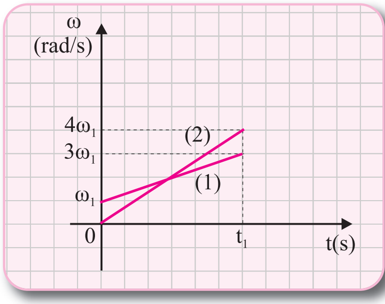


α) Μέχρι τη χρονική στιγμή t = 4s οι δύο δίσκοι έχουν διαγράψει ίδιο αριθμό περιστροφών.

β) Τη χρονική στιγμή t = 1s η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου (Β) έχει μέτρο 17rad/s.

γ) Τη χρονική στιγμή t = 3,5s και στους δύο δίσκους το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας.

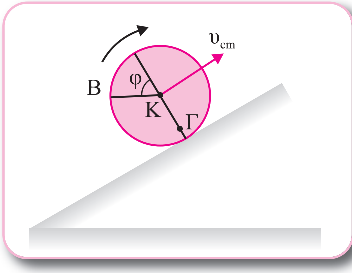
16.46) Δύο ομογενείς δίσκοι (1) και (2) με ακτίνες R_1 και R_2 κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν σε κεκλιμένο επίπεδο.



Η μεταβολή των γωνιακών ταχυτήτων των δίσκων σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται από τη γραφική παράσταση. Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελούν οι δύο δίσκοι μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι N_1 και N_2 αντίστοιχα. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $2N_1 = N_2$ β) $N_1 = N_2$ γ) $N_1 = 2N_2$

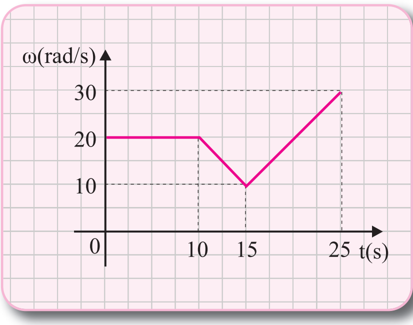
16.47) Μία ομογενής λεπτή ράβδος ΟΑ, μήκους L, μπορεί να περιστρέφεται σε σταθερό κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο της Β, το οποίο απέχει απόσταση $\frac{L}{4}$ από το άκρο της Ο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ράβδος αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από την οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή t_1 σταματά μόνιμα στην κατακόρυφη θέση, λόγω των τριβών που δέχεται από τον άξονα περιστροφής. Τα τόξα μέτρου $υ_B = 12\sqrt{3}$ m/s. Την ίδια χρονική στιγμή ένα σημείο Γ της κάθετης στο κεκλιμένο επίπεδο διαμέτρου απέχει από το κατώτερο σημείο του δίσκου απόσταση $d = \frac{R}{6}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το τόξο $s_Γ$ που διαγράφει το σημείο Γ σε χρονικό διάστημα $Δt = 2s$ είναι:



α) $s_Γ = 20m$ β) $s_Γ = 10m$ γ) $s_Γ = 4m$

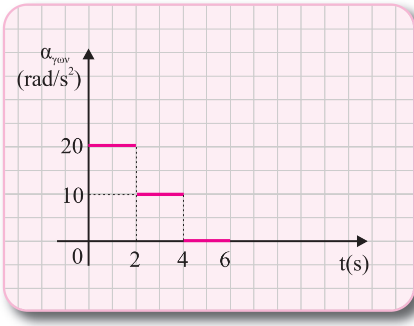
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16.59) Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται από τη γραφική παράσταση.

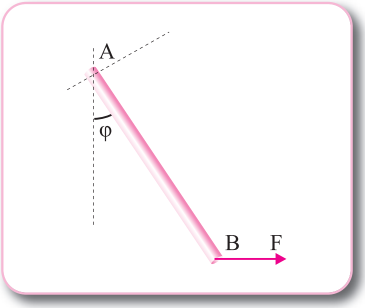


α) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος και να γίνει η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.
β) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 16s$.
γ) Να βρεθούν οι γωνίες που διαγράφει το στερεό σώμα στη διάρκεια του όγδοου και του εικοστού πέμπτου δευτερολέπτου της κίνησής του.

16.60) Μία σφαίρα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Η μεταβολή της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται στο διάγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι μηδέν.

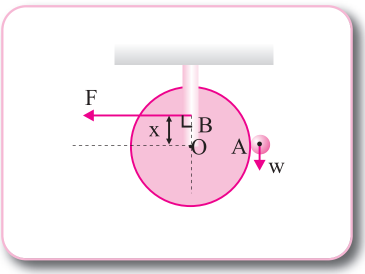


α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$, $t_3 = 3s$ και $t_5 = 5s$.
β) Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.
γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνίας που διαγράφει η σφαίρα σε συνάρτηση με τον χρόνο.



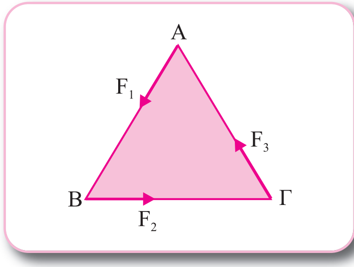
α) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad β) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad γ) $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad

17.41) Στο σημείο Α της οριζόντιας διαμέτρου μίας αβαρούς τροχαλίας με ακτίνα R στερεώνεται σώμα βάρους w. Σε σημείο Β, που βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο της τροχαλίας και απέχει απόσταση x από το κέντρο της Ο, ασκείται δύναμη μέτρου $F = 4w$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν το σύστημα ισορροπεί, η απόσταση x είναι:



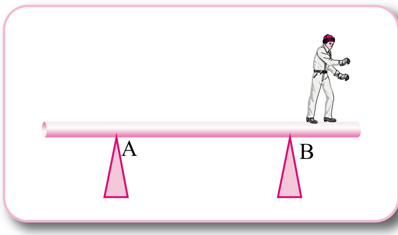
α) $x = \frac{R}{4}$ β) $x = \frac{R}{3}$ γ) $x = \frac{R}{5}$

17.42) Η ισόπλευρη αβαρής τριγωνική πλάκα του σχήματος, με πλευρά α, βρίσκεται επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δέχεται τρεις δυνάμεις μέτρου F που βρίσκονται στο επίπεδο της πλάκας. Ποια πρόταση είναι σωστή;



α) Η πλάκα ισορροπεί.
β) Η πλάκα περιστρέφεται δεξιόστροφα.
γ) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από τη μία κορυφή της πλάκας είναι ίση με $\tau = \frac{F\alpha\sqrt{3}}{2}$.

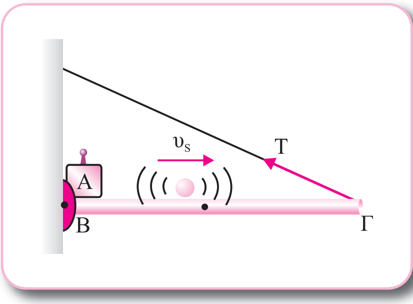
17.43) Ένας εργάτης μετακινείται πάνω σε ομογενή δοκό που στηρίζεται στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η θέση του εργάτη για την οποία η δοκός χάνει την επαφή με το στήριγμα Α και ισορροπεί οριακά:



α) δεν εξαρτάται από τη θέση του στηρίγματος Β.
β) εξαρτάται από τη μάζα του εργάτη.
γ) δεν εξαρτάται από το βάρος της δοκού.

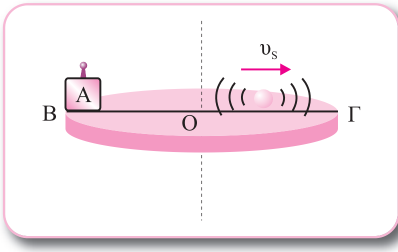
17.44) Το άκρο Α αβαρούς ράβδου μήκους L ενώνεται με οριζόντιο επίπεδο με άρθρωση. Η ράβδος στερεώνεται με νήμα από το μέσο της σε κατακόρυφο τοίχο, έτσι ώστε α) $m' = \frac{2m}{5}$ β) $m' = \frac{4m}{5}$ γ) $m' = \frac{3m}{5}$

17.50) Μία ηχητική πηγή μάζας m εκπέμπει ηχητικά κύματα με συχνότητα f_S και κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_S$ επάνω σε αβαρή δοκό ΒΓ, πηγαίνοντας από τη θέση Β στη θέση Γ. Το άκρο Β της δοκού είναι ενωμένο με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Η δοκός συγκρατείται στην οριζόντια θέση μέσω νήματος που συνδέει το άκρο της Γ με τον τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένας ακίνητος ανιχνευτής ήχων Α βρίσκεται στη θέση Β. Ποια πρόταση είναι σωστή;



α) Η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής και η τάση του νήματος μειώνονται.
β) Η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής μειώνεται, ενώ η ροπή της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση ως προς το σημείο Γ αυξάνεται.
γ) Το μήκος κύματος του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής είναι μεγαλύτερο από αυτό που εκπέμπει η πηγή και η ροπή της τάσης του νήματος ως προς το σημείο Β αυξάνεται.

17.51) Ένας ακίνητος ομογενής δίσκος μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο. Κατά μήκος μίας διαμέτρου ΒΓ του δίσκου κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_S$ μία ηχητική πηγή μάζας m που εκπέμπει κύματα με συχνότητα f_S. Στο σημείο Β του δίσκου βρίσκεται ακίνητος ανιχνευτής ήχων Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια πρόταση είναι σωστή;



α) Η ροπή του βάρους της ηχητικής πηγής ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής αυξάνονται.
β) Το μήκος κύματος του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής είναι μεγαλύτερο από αυτό που εκπέμπει η πηγή και η ροπή του βάρους της ηχητικής πηγής ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο είναι μηδενική.
γ) Ο αριθμός των κυμάτων που καταγράφει ο ανιχνευτής σε ορισμένο χρόνο είναι μικρότερος από τον αριθμό των κυμάτων που εκπέμπει η πηγή στο ίδιο χρονικό διάστημα και η ροπή του βάρους της ηχητικής πηγής ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο αυξάνεται.

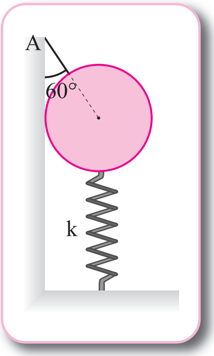
Α. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η δοκός είναι έτοιμη να ολισθήσει, να υπολογιστούν:

$α_1$) το μέτρο της δύναμης N_1 που δέχεται η δοκός από τον τοίχο και το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης N_2 που δέχεται από το έδαφος,

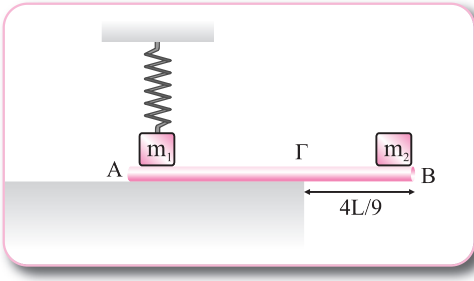
$α_2$) η θέση που βρίσκεται το σώμα M.

Β. Ποια χρονική στιγμή η δοκός είναι έτοιμη να ολισθήσει; Δίνεται $g = 10m/s^2$.

17.78) Στο σημείο Α ενός κατακόρυφου τοίχου δένεται νήμα, που σχηματίζει γωνία 60° με τον τοίχο. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος δένεται ομογενής σφαίρα βάρους $w = 200N$ που εφάπτεται στον τοίχο και σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 500N/m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $Δx = 0{,}2m$ και ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ της σφαίρας και του τοίχου είναι $μ_s = 0{,}2$. Η σφαίρα ισορροπεί και είναι έτοιμη να ολισθήσει. Να υπολογιστούν η τάση του νήματος και η δύναμη που ασκείται από τη σφαίρα στον τοίχο.



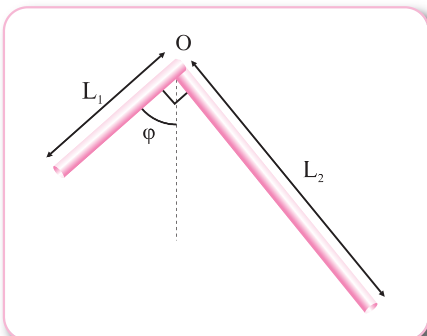
17.79) Μία ομογενής οριζόντια σανίδα ΑΒ, μήκους L και μάζας $m = 80kg$, είναι τοποθετημένη στην άκρη μίας πλατφόρμας έτσι, ώστε ένα τμήμα της σανίδας μήκους $\frac{4L}{9}$ να προεξέχει από την πλατφόρμα. Στην άκρη Α της σανίδας υπάρχει σώμα μάζας $m_1 = 20kg$ που είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 600N/m$. Στο άκρο Β βρίσκεται σώμα μάζας $m_2 = 20kg$ και το σύστημα ισορροπεί. Θεωρούμε ότι η σανίδα ΑΒ είναι σε επαφή με την πλατφόρμα μόνο στο σημείο Γ.



α) Να βρεθεί η δύναμη N που ασκεί το σώμα μάζας m_1 στη σανίδα.

β) Να υπολογιστεί η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

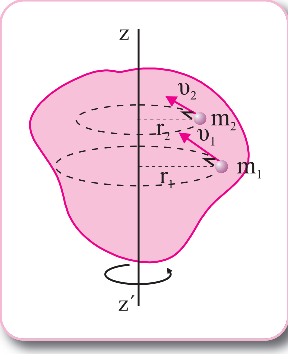
17.80) Δύο ομογενείς ράβδοι (1) και (2), με βάρη w_1 και $w_2 = 2w_1$ και μήκη L_1 και $L_2 = 2L_1$ αντίστοιχα, είναι ενωμένες στο ένα άκρο τους, σχηματίζοντας ορθή γωνία. Να υπολογιστεί η γωνία φ που πρέπει να σχηματίζει η ράβδος (1) με την κατακόρυφη, ώστε το σύστημα να ισορροπεί.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18ο
ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας I ενός στερεού ως προς κάποιον άξονα περιστροφής ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το στερεό επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής.

Δηλαδή: $\mathbf{I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...}$

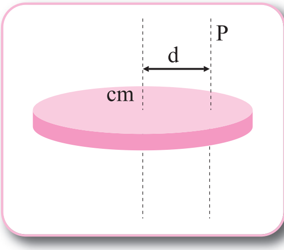


Στην κατασκευή μίας γέφυρας λαμβάνεται υπόψη η ροπή αδράνειάς της.

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος με μονάδα μέτρησης το $1 kg \cdot m^2$ στο SI.
Η ροπή αδράνειας αποτελεί μέτρο της αδράνειας του σώματος στη μεταβολή της περιστροφικής του κίνησης. Αντίστοιχο μέγεθος στη μεταφορική κίνηση είναι η μάζα.

ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER (ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner, αν η ροπή αδράνειας ενός στερεού μάζας M ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι I_{cm}, τότε η ροπή αδράνειάς του ως προς άλλον παράλληλο άξονα που απέχει απόσταση d από τον πρώτο δίνεται από τη σχέση:

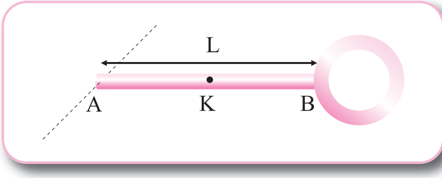


$$\mathbf{I_P = I_{cm} + Md^2}$$

Η μοναδική προϋπόθεση ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Steiner είναι οι δύο άξονες να είναι παράλληλοι μεταξύ τους, ακόμα και εάν ο δεύτερος άξονας βρίσκεται εκτός του στερεού.

γ) Οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων είναι ίσοι.

19.33) Στο άκρο Β μίας ομογενούς ράβδου ΑΒ, μήκους L και μάζας Μ, στερεώνεται δακτύλιος μάζας επίσης Μ. Το σύστημα των δύο σωμάτων μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί από την οριζόντια θέση. Ποια πρόταση είναι σωστή;

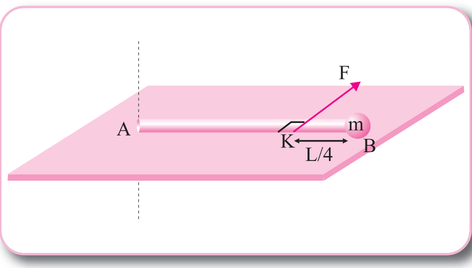


α) Εάν α_ρ, α_δ είναι οι κεντρομόλες επιταχύνσεις των κέντρων μάζας της ράβδου και του δακτυλίου αντίστοιχα, στην κατακόρυφη θέση ισχύει η σχέση $\alpha_\delta > \alpha_\rho$.
β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι μέγιστη, όταν το σύστημα βρίσκεται στην οριζόντια θέση.
γ) Η συνολική ροπή που δέχεται η ράβδος στην οριζόντια θέση έχει μέτρο $\Sigma\tau = Mg\dfrac{L}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

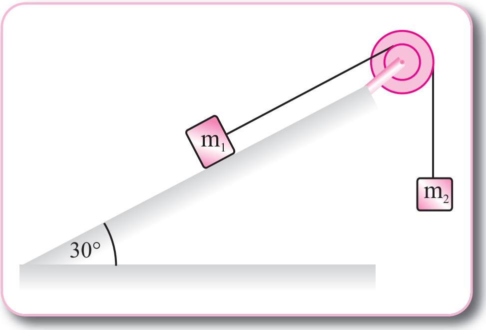
(Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται γνωστή και ίση με $g = 10\text{m/s}^2$.)

19.34) Ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους $L = 1\text{m}$ και μάζας $M = 6\text{kg}$, βρίσκεται ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Στο άκρο Β της ράβδου είναι στερεωμένη μάζα $m = 0{,}5\text{kg}$. Στο σημείο Κ, που απέχει από το άκρο Β της ράβδου απόσταση $\dfrac{L}{4}$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται δύναμη σταθερού μέτρου $F = 10\text{N}$, η οποία βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο και είναι κάθετη στη ράβδο. Η ροπή αδράνειας της ράβδου δίνεται από τη σχέση $I_{cm} = \dfrac{1}{12}ML^2$. Να υπολογιστούν:



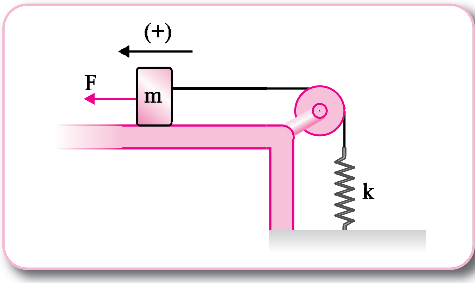
α) η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου,
β) η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$,
γ) η γραμμική ταχύτητα της μάζας m τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$.

19.35) Ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους $L = 1\text{m}$ και μάζας $M = 12\text{kg}$, βρίσκεται ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσο της Ο. Στο άκρο Α της ράβδου είναι στερεωμένο σώμα μάζας $m_1 = 4\text{kg}$. Στο σημείο Κ, που απέχει από το άκρο Β απόσταση $\dfrac{L}{4}$, βρίσκεται θετος στο επίπεδό τους. Στα αυλάκια των δίσκων της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρή, μη εκτατά νήματα τα οποία δεν ολισθαίνουν στην τροχαλία. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος του εσωτερικού δίσκου της τροχαλίας έχουμε δέσει σώμα με μάζα $m_1 = 6kg$ που μπορεί να κινείται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$. Στο ελεύθερο άκρο του νήματος του εξωτερικού δίσκου της τροχαλίας είναι δεμένο σώμα μάζας $m_2 = 1kg$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.



α) Να προσδιοριστεί προς τα πού θα κινηθεί το σύστημα και να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
β) Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των σωμάτων με μάζες m_1 και m_2.
γ) Να υπολογιστεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος με μάζα m_2, όταν το σώμα με μάζα m_1 έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 3{,}2m$.

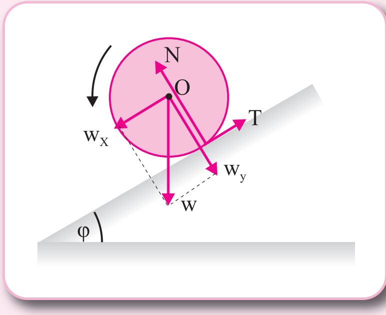
19.69) Σώμα μάζας m που μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο συνδέεται μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος με τροχαλία μάζας $M = m$. Το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία. Το άλλο άκρο του νήματος συνδέεται με κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F. Εκτρέπουμε το σώμα μάζας m από τη θέση ισορροπίας του.



α) Να αποδειχθεί ότι το σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
β) Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης.
Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

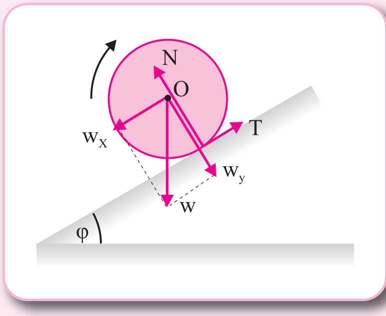
δή υπεύθυνη για τη στροφική κίνηση του σώματος. Προκειμένου το σώμα να στρέφεται δεξιόστροφα, η τριβή πρέπει να έχει φορά προς τα αριστερά.

β) Ομογενής σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επειδή το σώμα, λόγω της δύναμης w_x, επιταχύνεται προς τα κάτω, πρέπει και να στρέφεται αριστερόστροφα. Η τριβή, που είναι η μοναδική υπεύθυνη δύναμη για τη στροφική κίνηση του σώματος, πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, για να περιστρέφει το σώμα αριστερόστροφα.

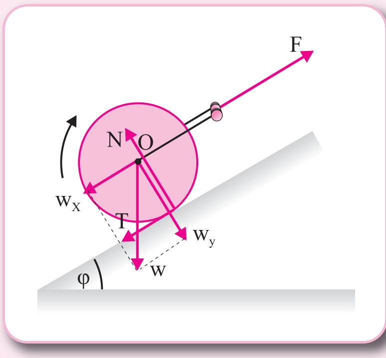
γ) Τροχός με αρχική ταχύτητα $υ_0$ αρχίζει να ανεβαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επίπεδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σώμα λόγω της δύναμης w_x επιβραδύνεται, επομένως έχουμε μείωση της αρχικής ταχύτητας του σώματος.

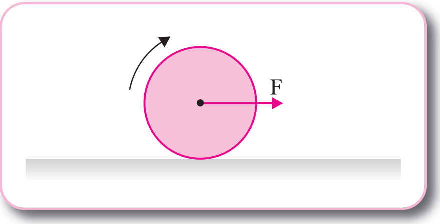
Ο τροχός, καθώς ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο, στρέφεται δεξιόστροφα. Η τριβή είναι η μοναδική δύναμη που έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής. Επομένως, πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, για να επιβραδύνει τη στροφική κίνηση του σώματος και να τείνει να το στρίψει αριστερόστροφα.

δ) Ομογενής δίσκος, που αρχικά ήταν ακίνητος, αρχίζει να ανεβαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επίπεδου υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης F.



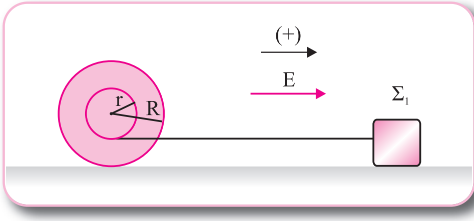
Επειδή ο δίσκος ήταν αρχικά ακίνητος και άρχισε να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης F, σημαίνει ότι $F > w_x$. Δηλαδή, το σώμα επιταχύνεται. Η τριβή είναι η μοναδική δύναμη που έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής. Άρα, η τριβή πρέπει να έχει φορά προς τα κάτω, έτσι ώστε να στρέφει δεξιόστροφα το σώμα και μέσω της ροπής της να το επιταχύνει.

20.44) Επάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο είναι ακίνητος ένας ομογενής δίσκος μάζας m, ακτίνας $R = \frac{1}{4\pi}$ m και ροπής αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος δέχεται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = mg$, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο αριθμός N των περιστροφών του δίσκου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{\frac{3}{g}}$ είναι:



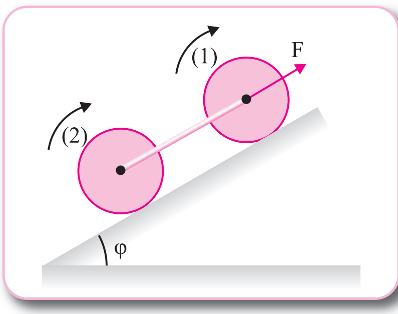
α) $N = 2$ β) $N = 1$ γ) $N = 3$

20.45) Μία διπλή τροχαλία με μάζα m, ακτίνες R και $r = \frac{R}{2}$ και ροπή αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$, που μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της, είναι αρχικά ακίνητη πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στην περιφέρεια του εσωτερικού δίσκου της τροχαλίας είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = m$ και θετικού φορτίου q, το οποίο ηρεμεί πάνω σε τμήμα του οριζόντιου επιπέδου που είναι λείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εφαρμόζεται στον χώρο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου E στη θετική κατεύθυνση, οπότε η διπλή τροχαλία αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε τμήμα του οριζόντιου επιπέδου που είναι τραχύ. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της τροχαλίας δίνεται από τη σχέση:



α) $\alpha_{cm} = \frac{4qE}{5m}$ β) $\alpha_{cm} = \frac{qE}{m}$ γ) $\alpha_{cm} = \frac{2qE}{7m}$

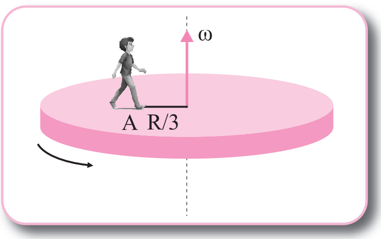
20.46) Επάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^o$ βρίσκονται μία ομογενής σφαίρα (1) και ένας ομογενής κύλινδρος (2), με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$, ίσες ακτίνες $R_1 = R_2 = R$ και ροπές αδράνειας $I_{\sigma_{cm}} = \frac{2}{5} mR^2$ και $I_{\kappa_{cm}} = \frac{1}{2} mR^2$ αντίστοιχα. Τα κέντρα μάζας των δύο στερεών είναι ενωμένα με αβαρή ράβδο η οποία δεν ασκεί τριβές στα δύο στερεά και δεν εμποδίζει την περιστροφή τους. Στη σφαίρα ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω,



α) Κατά τη διάρκεια της επαφής έχουμε διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα και για το κάθε σώμα ξεχωριστά.
β) Μετά τη σύγκρουση το σύστημα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega' = \frac{4\omega}{5}$.
γ) Η μεταβολή της στροφορμής του δίσκου κατά τη διάρκεια της επαφής είναι $\Delta L = -\frac{MR^2\omega}{5}$.

Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

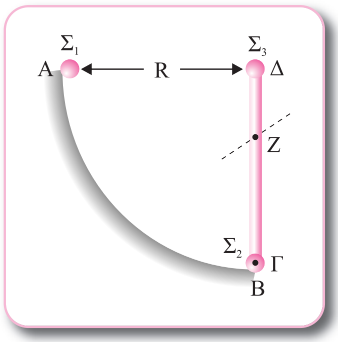
21.66) Επάνω σε έναν ομογενή δίσκο μάζας M και ακτίνας R που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω υπάρχει άνθρωπος μάζας $m = \frac{M}{2}$, ο οποίος αρχικά βρίσκεται στη θέση A, που απέχει από το κέντρο απόσταση $\frac{R}{3}$. Ο άνθρωπος μετακινείται στη θέση B και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μειώνεται στα $\frac{5}{9}$ της αρχικής. Ποια πρόταση είναι σωστή;



α) Η θέση B απέχει από το κέντρο απόσταση $x = R$.
β) Η στροφορμή του ανθρώπου κατά τη διάρκεια της μετακίνησής του παραμένει σταθερή.
γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος μειώνεται κατά 44,44%.

Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

21.67) Στο άκρο A ενός λείου τεταρτοκυκλίου AB, ακτίνας $R = \ell$, συγκρατείται ακίνητο σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = \frac{m}{2}$. Ομογενής κατακόρυφη ράβδος ΓΔ, μήκους ℓ, μάζας m και ροπής αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{12}m\ell^2$, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο της Z, το οποίο απέχει απόσταση $Z\Delta = \frac{\ell}{3}$ από το άκρο της Δ. Στα άκρα Γ και Δ της ράβδου είναι στερεωμένα σώματα Σ_2 και Σ_3 μικρών διαστάσεων με μάζες $m_2 = \frac{m}{2}$ και $m_3 = 7m$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος είναι τοποθετημένη έτσι, ώστε το σώμα Σ_2 να βρίσκεται στο άκρο B του τεταρτοκυκλίου. Αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο να κινηθεί, οπότε, φτάνοντας στο άκρο B, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:



α) $\omega = \sqrt{\frac{g}{6\ell}}$ β) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{9\ell}}$ γ) $\omega = \sqrt{\frac{g}{8\ell}}$

Στη γραφική παράσταση $P=f(t)$ η ευθεία (I) αντιστοιχεί σε επιταχυνόμενη κίνηση και η ευθεία (II) σε επιβραδυνόμενη κίνηση.

7. Μέση ισχύς

Η μέση ισχύς της ροπής μίας δύναμης για χρονικό διάστημα t δίνεται από τη σχέση $\bar{P}=\frac{W}{t}$, όπου W το έργο της ροπής της δύναμης στο χρονικό διάστημα t.

✓ **Ομαλή στροφική κίνηση**

Στην ομαλή στροφική κίνηση η μέση ισχύς της συνολικής ροπής που δέχεται το σώμα για χρονικό διάστημα t είναι:

$\bar{P}=\frac{W}{t}=0$, γιατί δεν παράγεται έργο.

✓ **Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση**

Στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση η μέση ισχύς της συνολικής ροπής από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P}=\frac{W}{t} \quad ή \quad \bar{P}=\frac{\Sigma\tau\theta}{t} \quad ή \quad \bar{P}=\frac{\Sigma\tau\left(\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2\right)}{t} \quad ή$$

$$\bar{P}=\frac{\Sigma\tau\omega_0 t}{t}+\frac{\Sigma\tau\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2}{2t} \quad ή \quad \bar{P}=\Sigma\tau\omega_0+\frac{\Sigma\tau\alpha_{\gamma\omega\nu}t}{2}$$

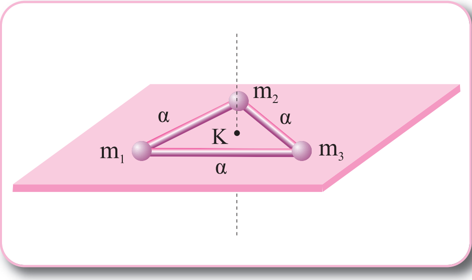
ή $\boldsymbol{\bar{P}=P_0+\frac{\Sigma\tau\alpha_{\gamma\omega\nu}t}{2}}$, όπου P_0 είναι η στιγμιαία ισχύς της συνολικής ροπής τη χρονική στιγμή $t=0$.

8. Ρυθμοί μεταβολής της ενέργειας

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης δίνεται από τη σχέση: $\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}=\Sigma\vec{F}\vec{\upsilon}$

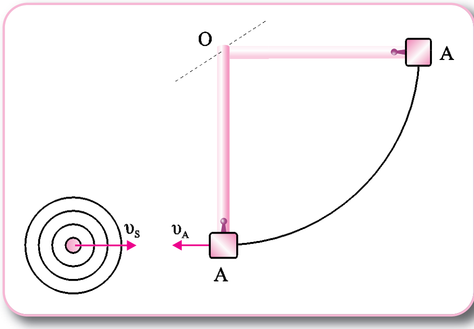
✓ Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης δίνεται από τη σχέση: $\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt}=\Sigma\vec{\tau}\vec{\omega}$

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην κύλιση χωρίς ολίσθηση δίνεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt}=\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}+\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt}=\Sigma\vec{F}\vec{\upsilon}+\Sigma\vec{\tau}\vec{\omega}$



α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος.
β) Να βρεθεί το έργο της εξωτερικής ροπής που απαιτείται ώστε το σύστημα να αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\text{rad/s}$.
γ) Να υπολογιστεί η μέση ισχύς της εξωτερικής ροπής μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$, οπότε το σύστημα αποκτά γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\text{rad/s}$.

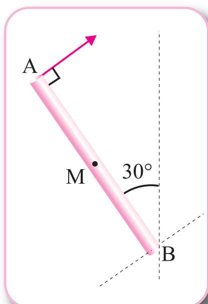
22.71) Μία ηχητική πηγή που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_S = 10\text{m/s}$ εκπέμπει ήχο με συχνότητα $f_S = 330\text{Hz}$. Ομογενής ράβδος ΟΑ, με μάζα $M = 12\text{kg}$ και μήκος $\ell = 2\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άκρο Α της ράβδου βρίσκεται ένα σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$, αμελητέων διαστάσεων, που φέρει ανιχνευτή ήχων. Η ράβδος αρχικά βρίσκεται σε οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη να περιστραφεί. Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, η ταχύτητα του άκρου της Α έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα της ηχητικής πηγής ($\upsilon_{\eta\chi} = 340\text{m/s}$). Να υπολογιστούν:



α) η γωνιακή ταχύτητα, όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη,
β) η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής, όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση.
Δίνονται $I_{cm_\rho} = \dfrac{1}{12}M\ell^2$, $g = 10\text{m/s}^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

22.72) Ομογενής ράβδος ΑΒ, μάζας $m = 1\text{kg}$ και μήκους $\ell = 1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Β. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη και σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την κατακόρυφη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο άκρο Α της ράβδου σταθερή δύναμη με μέτρο $F = 20\pi$ N, που βρίσκεται στο επίπεδο περιστροφής της ράβδου και είναι συνέχεια κάθετη σ' αυτήν.

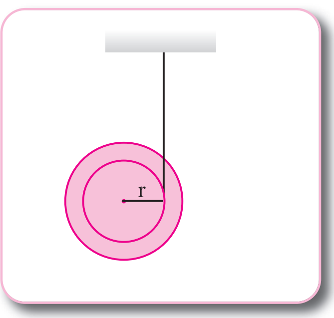


Α. Όταν η ράβδος βρίσκεται για πρώτη φο-

γ) τον λόγο της κινητικής ενέργειας της μάζας m προς τη συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος, κατά τη διάρκεια της περιστροφής του συστήματος των δύο σωμάτων,
δ) το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία φ ως προς την οριζόντια διεύθυνση τέτοια, ώστε ημφ = 0,3.
Δίνονται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

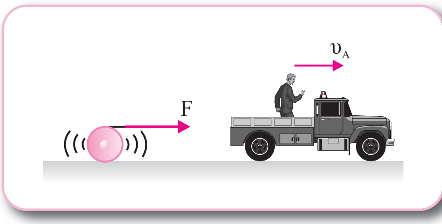
(Θέμα Πανελλαδικών – Ιούλιος 2010)

22.84) Ένας διπλός κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I = 1 kg \cdot m^2$, η ολική του μάζα M = 1kg και η ακτίνα του εσωτερικού κυλίνδρου r = 0,1m. Ο κύλινδρος είναι στερεωμένος σε οροφή μέσω νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του εσωτερικού του δίσκου χωρίς να ολισθαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί. Να υπολογιστούν:



α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου,
β) η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 που ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά Δy = 45,45m,
γ) η ισχύς της ροπής της τάσης του νήματος τη χρονική στιγμή t_1,
δ) η μέση ισχύς του βάρους από τη χρονική στιγμή t = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1.
Δίνεται $g = 10 m/s^2$.

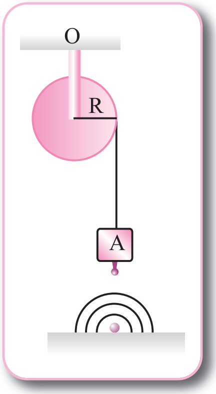
22.85) Ομογενής δίσκος μάζας M = 10kg και ακτίνας R βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0, μέσω αβαρούς, μη εκτατού νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρειά του, ασκείται στον δίσκο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F = 30N, οπότε ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Στο κέντρο του δίσκου είναι στερεωμένη μικρή ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο με συχνότητα $f_S = 450Hz$. Στο οριζόντιο επίπεδο σε μεγάλη απόσταση βρίσκεται παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $υ_A = 10m/s$ στην ίδια κατεύθυνση με τον δίσκο, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Δίνεται $υ_{ηχ} = 340m/s$.) Να υπολογιστούν:



α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου,
β) η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής τη χρονική στιγμή $t_1 = 10s$,

γ) η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, όταν ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια στον δίσκο η δύναμη F είναι 3.600J/s.
Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στον δίσκο.
Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$.

22.86) Μία τροχαλία μάζας M και ακτίνας $R = \frac{1}{3}$ m είναι στερεωμένη σε σταθερό σημείο O. Στο ελεύθερο άκρο του αβαρούς και μη εκτατού νήματος που διέρχεται από το αυλάκι της τροχαλίας

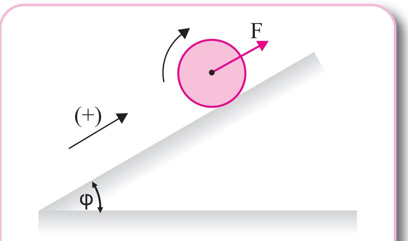


είναι δεμένο σώμα Σ, μάζας m = M, το οποίο φέρει ανιχνευτή ήχων A. Κάτω από το σώμα Σ και στην ίδια κατακόρυφη με αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα, βρίσκεται ακίνητη ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο με συχνότητα $f_S = 476$Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε το σύστημα τροχαλία-σώμα Σ ελεύθερο να κινηθεί. (Δίνεται $\upsilon_{\eta\chi} = 340$m/s.) Να υπολογιστούν:
α) η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας,
β) η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής τη χρονική στιγμή $t_1 = 3$s,
γ) η συχνότητα του ήχου που καταγράφει ο ανιχνευτής, όταν η τροχαλία έχει διαγράψει $\frac{180}{\pi}$ περιστροφές.
Το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει.
Δίνονται $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ και $g = 10$m/s^2.

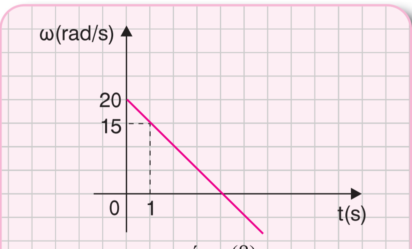
$β_2$) ο αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα $Σ_1$ έχει διανύσει διάστημα $s = 1m$,

$β_3$) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ τη χρονική στιγμή t΄, κατά την οποία το ανώτερο σημείο Β του μικρού δίσκου της τροχαλίας έχει ταχύτητα μέτρου $υ_B = \dfrac{3π\sqrt{2}}{40}$ m/s.

E29) Ομογενής κύλινδρος, με μάζα $m = 2kg$ και ακτίνα $R = 0{,}2m$, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $φ = 30^o$. Στον κύλινδρο ασκείται σταθερή δύναμη F, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Στο διάγραμμα του σχήματος (β) φαίνεται πώς μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου. Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ ο κύλινδρος βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0m$. Δίνεται $I_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2$. Να υπολογιστούν:



σχήμα (α)



σχήμα (β)

α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου,

β) τα μέτρα της δύναμης F και της στατικής τριβής που ασκούνται στον κύλινδρο,

γ) τα έργα της δύναμης F και του βάρους από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_5 = 5s$,

δ) η μέση ισχύς της δύναμης F στη διάρκεια του τελευταίου δευτερολέπτου της ανοδικής κίνησης του κυλίνδρου,

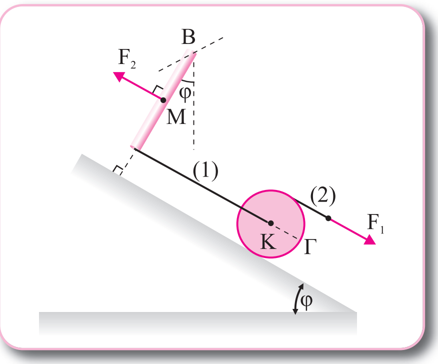
ε) η στροφορμή του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι $\dfrac{dK}{dt} = 18J/s$.

E30) Α. Ομογενής λεπτός δακτύλιος, με μάζα $m_1 = 1kg$, ακτίνα $R = 0{,}2m$ και ροπή αδράνειας που δίνεται από τη σχέση $I_1 = m_1R^2$, βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και το κέντρο του απέχει απόσταση $d = 10{,}2m$ από κατακόρυφο τοίχο. Στον δακτύλιο ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F_1 = F$ της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο Κ του δακτυλίου. Το ανώτερο σημείο Β του δακτυλίου συνδέεται μέσω νήματος με το άκρο Α ομογενούς ράβδου ΟΑ, μάζας $m_2 = 4kg$ και μήκους $\ell = 1m$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άκρο Α της ράβδου ασκείται δύναμη μέτρου $F_2 = F$ που είναι κάθετη στη ράβδο. Το σύστημα ισορροπεί σε τέτοια θέση, ώστε η ράβδος να σχηματίζει γωνία $φ = 30^o$ με την κατακόρυφη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται $\sqrt{3} = 1{,}73$.

Ε32) Α. Ομογενής δίσκος κέντρου Κ, μάζας $m_1 = m = 2kg$ και ακτίνας $R = 0{,}4m$, βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης $\varphi = 30^o$. Το κέντρο Κ του δίσκου συνδέεται μέσω νήματος (1) με το άκρο Α μίας ομογενούς ράβδου ΑΒ, μάζας $m_2 = m = 2kg$ και μήκους $\ell = 1m$, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Β. Μέσω νήματος (2) που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του δίσκου ασκείται στον δίσκο σταθερή δύναμη παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο με μέτρο $F_1 = 5N$. Στο μέσο Μ της ράβδου ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F_2 που είναι κάθετη στη ράβδο. Το σύστημα ισορροπεί σε τέτοια θέση, ώστε η διεύθυνση της ράβδου να είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται $\pi = 3{,}14$, $\sqrt{3} = 1{,}73$ και $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$. Να υπολογιστούν:

α_1) η τάση του νήματος (1),

α_2) το μέτρο της δύναμης F_2.



Β. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ κόβεται το νήμα (1) και ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

β_1) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του δίσκου στη διάρκεια του τρίτου δευτερολέπτου της κίνησής του.

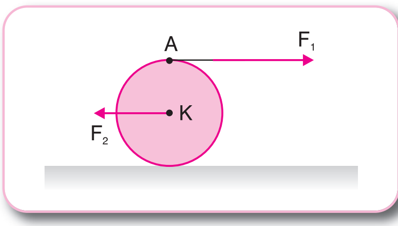
β_2) Να υπολογιστούν το μήκος του νήματος (2) που έχει ξετυλιχτεί και η στροφορμή του δίσκου τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του σημείου Γ της περιφέρειας του τροχού, που βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε η ακτίνα ΚΓ του δίσκου να είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, έχει μέτρο $\upsilon_\Gamma = 10\sqrt{2}$ m/s.

β_3) Να ελεγχθεί εάν η ράβδος θα εκτελέσει ανακύκλωση.

Ε33) Α. Ομογενής δίσκος μάζας $m = 5kg$ και ακτίνας $R = 0{,}2m$ ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$, μέσω νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του δίσκου, του ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_1 = 20N$ και ταυτόχρονα στο κέντρο Κ του δίσκου ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_2 = 10N$, αντίθετης κατεύθυνσης από την F_1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$. Να υπολογιστούν:

α_1) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου και το μέτρο της στατικής τριβής,

α_2) η ισχύς της δύναμης F_1 και η ισχύς της δύναμης F_2 τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΖ΄ έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu 30° = \dfrac{ZZ'}{AZ}$ ή $ZZ' = AZ\sigma\upsilon\nu 30°$ ή

$ZZ' = \dfrac{d}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $ZZ' = \dfrac{d\sqrt{3}}{4}$

$p_Z = \rho g h_Z = \rho g (ZZ') = \dfrac{\rho g d\sqrt{3}}{4}$

γ) $p_\theta = p_{\upsilon\delta\rho} + p_{at}$ ή $p_\theta = \rho g \cdot 3d + p_{at}$ ή

$p_\theta = 3\rho g d + p_{at}$

12.104) α$_1$) $A_1 = \pi r_1^2 = 16\pi \cdot 10^{-4} m^2$ και

$A_2 = \pi r_2^2 = 576\pi \cdot 10^{-4} m^2$

$\Delta p_1 = \Delta p_2$ ή $\dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2}$ ή $F_2 = F_1\dfrac{A_2}{A_1}$ ή

$F_2 = m_1 g\dfrac{A_2}{A_1}$ ή $F_2 = 7.200N$

α$_2$) $w_B = m_2 g = 2.000N$

Επειδή $F_2 > w_2$, το σώμα Σ_2 κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση:

$\alpha = \dfrac{\Sigma F}{m_2}$ ή $\alpha = \dfrac{F_2 - w_2}{m_2}$ ή $\alpha = 26 m/s^2$

Β. Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x = 0,1m, η δύναμη που ασκείται στο μικρό έμβολο έχει μέτρο:

$F_1' = w_1 - F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g - kx$ ή $F_1' = 160N$

Άρα, η επιπλέον δύναμη στο μεγάλο έμβολο έχει μέτρο:

$F_2' = F_1'\dfrac{A_2}{A_1}$ ή $F_2' = 5.760N$

12.105) α) $h_A = (\Gamma A') = \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 0{,}05m$

$h_B = (\Gamma B') = \dfrac{1}{2} g t_2^2 = 0{,}2m$

β) $p_{\upsilon\delta\rho_A} = \rho g h_A = 500Pa$ και

$p_{\upsilon\delta\rho_B} = \rho g h_B = 2.000Pa$

γ) $p_A = p_{\upsilon\delta\rho_A} + p_{at} = 1{,}005 \cdot 10^5 Pa$ και

$p_B = p_{\upsilon\delta\rho_B} + p_{at} = 1{,}02 \cdot 10^5 Pa$

δ) $h_\Delta = h_A + \dfrac{AB}{2} = h_A + \dfrac{h_B - h_A}{2}$ ή $h_\Delta = 0{,}125m$

$p_\Delta = \rho g h_\Delta$ ή $p_\Delta = 1.250Pa$

12.106) α) $\dfrac{p_{\upsilon\delta\rho_A}}{p_{\upsilon\delta\rho_B}} = \dfrac{1}{2}$ ή $\dfrac{\rho g h_A}{\rho g h_B} = \dfrac{1}{2}$ ή $\dfrac{h_A}{h_B} = \dfrac{1}{2}$

β) $p_{\upsilon\delta\rho_A} + p_{\upsilon\delta\rho_B} = 2p_{at}$ ή $\rho g h_A + \rho g h_B = 2p_{at}$ ή

$3\rho g h_A = 2p_{at}$ ή $h_A = \dfrac{2p_{at}}{3\rho g}$ ή $h_A = \dfrac{20}{3}m$

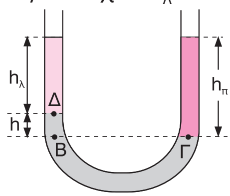
$p_{\upsilon\delta\rho_A} = \rho g h_A = \dfrac{2}{3} \cdot 10^5 Pa$ και

$p_{\upsilon\delta\rho_B} = \rho g h_B = 2\rho g h_A = \dfrac{4}{3} \cdot 10^5 Pa$

γ) $p_A = p_{\upsilon\delta\rho_A} + p_{at} = \dfrac{5}{3} \cdot 10^5 Pa$ και

$p_B = p_{\upsilon\delta\rho_B} + p_{at} = \dfrac{7}{3} \cdot 10^5 Pa$

12.107) α) Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη χαμηλότερη διαχωριστική επιφάνεια. Επειδή στα σημεία Β και Γ οι πιέσεις είναι ίσες και ισχύει $h_\lambda + h = h_\pi$, έχουμε:



$p_B = p_\Gamma$ ή $\rho_\nu g h + \rho_\lambda g h_\lambda + p_{at} = \rho_\pi g h_\pi + p_{at}$ ή

$\rho_\nu h + \rho_\lambda h_\lambda = \rho_\pi h_\pi$ ή $\rho_\nu h + \rho_\lambda h_\lambda = \rho_\pi (h_\lambda + h)$ ή

$h_\lambda = \dfrac{(\rho_\nu - \rho_\pi)h}{\rho_\pi - \rho_\lambda}$ ή $h_\lambda = 0{,}25m$

$h_\pi = h_\lambda + h$ ή $h_\pi = 0{,}35m$

β) $p_\Delta = \rho_\lambda g h_\lambda + p_{at}$ ή $p_\Delta = 1{,}018 \cdot 10^5 Pa$

$p_\Gamma = \rho_\pi g h_\pi + p_{at}$ ή $p_\Gamma = 1{,}028 \cdot 10^5 Pa$

12.108) α) Θεωρούμε το νερό σε μια τυχαία θέση, όπου το νερό στο αριστερό σκέλος του σωλήνα έχει κατέβει κατά x και στο δεξιό σκέλος έχει ανέβει κατά x.

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$ ή $\omega = 10 rad/s$ και

$A = d = 0{,}4m$

$x = 0{,}4ημ\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ SI

β) $x_{B'} = -\dfrac{A}{2} = -0{,}2m$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$ΣF = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = kx_1$ ή $x_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{k}$

ή $x_1 = 0{,}1m$

Επομένως:

$h_B = h - \left(|x_{B'}| - x_1\right)$ ή $h_B = 0{,}9m$

$p_B = p_{at} + \rho g h_B$ ή $p_B = 1{,}09 \cdot 10^5 Pa$

γ) $\dfrac{ΔK}{Δt} = 0$ ή $ΣFυ = 0$, άρα μηδενίζεται για πρώτη φορά στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και για δεύτερη φορά στη θέση $x_{Γ'} = -A = -0{,}4m$.

$h_Γ = h - \left(|x_{Γ'}| - x_1\right) = 0{,}7m$

$p_{υδρ_Γ} = \rho g h_Γ$ ή $p_{υδρ_Γ} = 0{,}07 \cdot 10^5 Pa$

δ) Για την ταλάντωση του $Σ_2$ ισχύει:

$ΣF_2 = -D_2 x$ ή $F_{επ} + w_2 = -m_2\omega^2 x$ ή

$F_{επ} = -m_2\omega^2 x - m_2 g$ ή

$F_{επ} = -10 - 100x$ (SI)

Για $F_{επ} = 20N$: $20 = -10 - 100x_{Δ'}$ ή $x_{Δ'} = -0{,}3m$

$h_Δ = h - \left(|x_{Δ'}| - x_1\right) = 0{,}8m$

$p_{υδρ_Δ} = \rho g h_Δ = 0{,}08 \cdot 10^5 Pa$

12.116) α) $V_1 = V_2$ ή $A_1 s_1 = A_2 s_2$ ή $s_2 = \dfrac{A_1}{A_2} s_1$

ή $s_2 = \dfrac{s_1}{4}$ ή $s_2 = 5cm$

β) $Δp_1 = Δp_2$ ή $\dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2}$ ή $F_2 = \dfrac{A_2}{A_1} F_1$ ή

$F_2 = 4F_1$ ή $F_2 = 800N$

γ) $\bar{υ}_1 = \dfrac{s_1}{Δt}$ ή $\bar{υ}_1 = 0{,}1m/s$ και $\bar{υ}_2 = \dfrac{s_2}{Δt}$ ή

$\bar{υ}_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2} m/s$

δ) $\bar{P}_{F_1} = \dfrac{W_{F_1}}{Δt} = \dfrac{F_1 s_1}{Δt}$ ή $\bar{P}_{F_1} = F_1 \bar{υ}_1$ ή $\bar{P}_{F_1} = 20W$

και $\bar{P}_{F_2} = F\bar{υ}_2$ ή $\bar{P}_{F_2} = 20W$

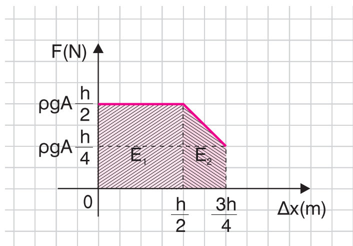
12.117) α) Για μετακίνηση του πυθμένα $Δx = \dfrac{h}{2}$ δεν έχει χυθεί ακόμη νερό, άρα:

$ΣF = 0$ ή $F - w = 0$ ή

$F = w = mg = \rho V g = \rho A \dfrac{h}{2} g$

Για να χυθεί το μισό νερό, πρέπει ο πυθμένας να μετακινηθεί κατά $\dfrac{h}{2} + \dfrac{h}{4} = \dfrac{3h}{4}$.

Για $Δx' = \dfrac{3h}{4}$ έχουμε: $F = \rho A \dfrac{h}{4} g$

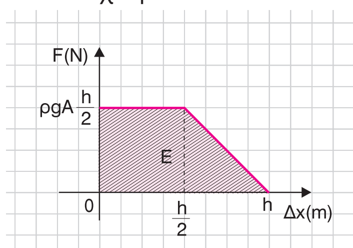


$W_F = (E_1) + (E_2)$ ή

$W_F = \rho g A \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{h}{2} + \dfrac{\rho g A \dfrac{h}{2} + \rho g A \dfrac{h}{4}}{2} \dfrac{h}{4}$ ή

$W_F = \rho g A \dfrac{h^2}{4} + \rho g A \dfrac{3h^2}{32}$ ή $W_F = \dfrac{11\rho g A h^2}{32}$

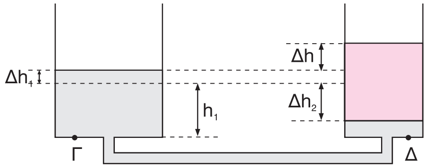
β) Για $Δx'' = h$ έχουμε $F = 0$.



12.122) α) $V = A_1h_1 + A_2h_1$ ή $V = (A_1 + A_2)h_1$ ή

$h_1 = \dfrac{V}{A_1 + A_2}$ ή $h_1 = 20cm$

β) Έστω ότι η στάθμη του υδραργύρου ανεβαίνει κατά Δh_1 στο δοχείο Α και κατεβαίνει κατά Δh_2 στο δοχείο Β.



$A_1\Delta h_1 = A_2\Delta h_2$ ή $\Delta h_2 = \dfrac{A_1}{A_2}\Delta h_1$ ή $\Delta h_2 = 4\Delta h_1$

$p_\Gamma = p_\Delta$ ή $gh_1\rho_u + g\Delta h_1\rho_u =$

$= g(h_1 - \Delta h_2)\rho_u + g(\Delta h_2 + \Delta h_1 + \Delta h)\rho_v$ ή

$h_1\rho_u + \Delta h_1\rho_u =$

$= h_1\rho_u - 4\Delta h_1\rho_u + 4\Delta h_1\rho_v + \Delta h_1\rho_v + \Delta h\rho_v$ ή

$5\Delta h_1\rho_u - 5\Delta h_1\rho_v = \Delta h\rho_v$ ή $\Delta h_1 = \dfrac{\Delta h\rho_v}{5(\rho_u - \rho_v)}$ ή

$\Delta h_1 = 0{,}8cm$

$V_{νερού} = (\Delta h + \Delta h_1 + \Delta h_2)A_2$ ή

$V_{νερού} = 1.088cm^3$

γ) $p_\Gamma = p_{at} + (h_1 + \Delta h_1)\rho_u g$ ή

$p_\Gamma = 1{,}282 \cdot 10^5 Pa$

12.123) α) $V_1 = V_2$ ή $A_1\ell_1 = A_2\ell_2$ ή $\ell_1 = \dfrac{A_2}{A_1}\ell_2$

ή $\ell_1 = 16cm$

β) $\Delta p_1 = \Delta p_2$ ή $\dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2}$ ή $F_2 = \dfrac{A_2}{A_1}F_1$ ή

$F_2 = 400N$

γ) $W_{F_1} = F_1\ell_1 = 32J$ και $W_{F_2} = F_2\ell_2 = 32J$

δ) $\Sigma F_2 = m_2\alpha_2$ ή $F_2 - F_2' = m_2\alpha_2$ ή

$F_2' = F_2 - m_2\alpha_2$ ή $F_2' = 390N$

12.124) α) $εφφ = \dfrac{\alpha}{g}$ ή $\alpha = gεφφ$ ή

$\alpha = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} m/s^2$

(βλέπε παρατηρήσεις)

β) $\Sigma F = m\alpha$ ή $T = m\alpha$ ή $\mu mg = m\alpha$ ή $\mu = \dfrac{\alpha}{g}$

ή $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

γ) $u = u_0 - \alpha t$ ή $t = \dfrac{u_0}{\alpha}$ ή $t = \sqrt{3}\,s$

δ) $s = u_0 t - \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ ή $s = 5\sqrt{3}\,m$

12.125) α₁) $p = p_{at} + \rho gh$ ή $p = 2 \cdot 10^5 Pa$

$T = \mu N = \mu(w + F') = \mu(w + pA) = 2.100N$

$\Sigma F = 0$ ή $F = F_{ελ} + T$ ή $F_{ελ} = F - T$ ή

$kx_1 = F - T$ ή $k = \dfrac{F - T}{x_1}$ ή $k = 1.000N/m$

α₂) $U = \dfrac{1}{2}kx_1^2$ ή $U = 5J$

Β. Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

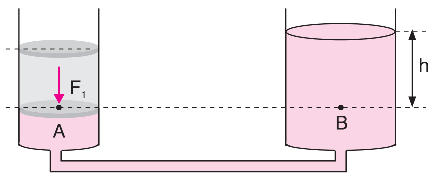
$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_1} + W_T + W_{F_{ελ}}$ ή

$0 - 0 = F_1 s - Ts + \left[\dfrac{1}{2}kx_1^2 - \dfrac{1}{2}k(x_1 + s)^2\right]$ ή

$F_1 = 2.250N$

12.126) Α. $p_A = p_B$ ή $p_{at} + \dfrac{F_1}{A_1} = p_{at} + \rho_v gh$ ή

$F_1 = \rho_v ghA_1$ ή $F_1 = 4N$



Β. Όταν η στάθμη του νερού στο δοχείο (1) κατεβαίνει κατά x, στο δοχείο (2) η στάθμη ανεβαίνει κατά x΄, έτσι ώστε να ισχύει: $V_1 = V_2$

ή $xA_1 = x'A_2$ ή $x' = \dfrac{x}{4}$

Επομένως σε κάθε θέση η υψομετρική διαφορά της στάθμης του νερού στα δύο δοχεία είναι $h = \dfrac{5x}{4}$.

Το έμβολο δέχεται από το νερό δύναμη:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon'_A}{\upsilon} f_s \;\; ή \;\; f_A = \frac{\upsilon + \frac{5\upsilon_A}{9}}{\upsilon} f_s$$

13.51) α: $A_A \upsilon_A = A_B \upsilon_B \;\; ή \;\; \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{A_B}{A_A} \;\; ή$

$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{A_B}{4A_B} \;\; ή \;\; \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{1}{4} \;\; ή \;\; \upsilon_B = 4\upsilon_A$

$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m \upsilon_A^2}{\frac{1}{2}\Delta m \upsilon_B^2} \;\; ή \;\; \frac{K_A}{K_B} = \frac{\upsilon_A^2}{\upsilon_B^2} \;\; ή \;\; \frac{K_A}{K_B} = \frac{\upsilon_A^2}{16\upsilon_A^2} \;\; ή$

$\frac{K_A}{K_B} = \frac{1}{16}$

13.52) α: $V_v = \alpha^2 h = \frac{\alpha^3}{3}$

Εάν V_1, V_2 οι όγκοι του νερού που αφαιρούν οι αντλίες A_1 και A_2 αντίστοιχα και V_3 ο όγκος νερού που προσθέτει στη δεξαμενή η βρύση, τη χρονική στιγμή t ισχύει:

$V_v + V_3 = V_1 + V_2 \;\; ή \;\; \frac{V_v}{t} + \frac{V_3}{t} = \frac{V_1}{t} + \frac{V_2}{t} \;\; ή$

$\frac{V_v}{t} + \Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2 \;\; ή \;\; \frac{V_v}{t} + 2\Pi = 4\Pi \;\; ή \;\; t = \frac{V_v}{2\Pi} \;\; ή$

$t = \frac{\frac{\alpha^3}{3}}{2\Pi} \;\; ή \;\; t = \frac{\alpha^3}{6\Pi}$

13.53) γ: $\Pi = \frac{V}{\Delta t} \;\; ή \;\; A\upsilon = \frac{V}{\Delta t} \;\; ή \;\; \pi r^2 \upsilon = \frac{V}{\Delta t} \;\; ή$

$\upsilon = \frac{V}{\Delta t \pi r^2} \;\; ή \;\; \upsilon = 1 m/s$

13.54) α: $\Pi = v\Pi' \;\; ή \;\; \pi\frac{\delta^2}{4}\upsilon = v\frac{\pi\delta'^2}{4}\upsilon' \;\; ή$

$\upsilon' = \frac{\delta^2}{v\delta'^2}\upsilon$

Ασκήσεις

13.55) α) Εφόσον το πλάτος του ποταμού είναι σταθερό, η διατομή είναι ανάλογη του βάθους.

$\Pi_1 = \Pi_2 \;\; ή \;\; A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \;\; ή \;\; kh_1\upsilon_1 = kh_2\upsilon_2 \;\; ή$

$\upsilon_2 = \frac{h_1\upsilon_1}{h_2} \;\; ή \;\; \upsilon_2 = 2m/s$

β) $\Pi_1 = \Pi_3 \;\; ή \;\; A_1\upsilon_1 = A_3\upsilon_3 \;\; ή \;\; kh_1\upsilon_1 = kh_3\upsilon_3 \;\; ή$

$h_3 = \frac{h_1\upsilon_1}{\upsilon_3} \;\; ή \;\; h_3 = 1m$

γ) $\Pi_{τελ} = \Pi_{αρχ} \;\; ή \;\; kh_{τελ}\upsilon_{τελ} = kh_{αρχ}\upsilon_{αρχ} \;\; ή$

$1{,}2h_{αρχ}\upsilon_{τελ} = h_{αρχ}\upsilon_{αρχ} \;\; ή$

$\upsilon_{τελ} = \frac{\upsilon_{αρχ}}{1{,}2} \;\; ή \;\; \upsilon_{τελ} = \frac{5}{6}\upsilon_{αρχ}$

$\pi_\upsilon\% = \frac{\upsilon_{τελ} - \upsilon_{αρχ}}{\upsilon_{αρχ}} \cdot 100\% =$

$= \frac{\frac{5}{6}\upsilon_{αρχ} - \upsilon_{αρχ}}{\upsilon_{αρχ}} 100\% \simeq -16{,}67\%$

13.56) α) $\Pi_1 = \Pi_2 \;\; ή \;\; \Pi_1 = A_2\upsilon_2 \;\; ή$

$\Pi_1 = \pi\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 \upsilon_2 \;\; ή \;\; \delta_2 = \sqrt{\frac{4\Pi_1}{\pi\upsilon_2}} \;\; ή \;\; \delta_2 = 0{,}02m$

β) $\Pi_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} \;\; ή \;\; \Delta V = \Pi_1 \Delta t \;\; ή \;\; \Delta V = 0{,}6m^3$

13.57) α) Λόγω της αρχής διατήρησης της ύλης έχουμε:

$\Delta m_A - \Delta m_B - \Delta m_\Gamma + \Delta m_\Delta + \Delta m_Z = 0 \;\; ή$

$\rho\Delta V_A - \rho\Delta V_B - \rho\Delta V_\Gamma + \rho\Delta V_\Delta + \rho\Delta V_Z = 0 \;\; ή$

$A_A\upsilon_A\Delta t - A_B\upsilon_B\Delta t - A_\Gamma\upsilon_\Gamma\Delta t + A_\Delta\upsilon_\Delta\Delta t + A_Z\upsilon_Z\Delta t = 0$

ή $\Pi_A - \Pi_B - \Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_Z = 0 \;\; ή \;\; \Pi_Z = -4m^3/s$, άρα το νερό εξέρχεται από τον σωλήνα στο σημείο Z.

β) $\frac{\Pi_B}{\Pi_\Delta} = 2 \;\; ή \;\; \frac{A_B\upsilon_B}{A_\Delta\upsilon_\Delta} = 2 \;\; ή \;\; \frac{2A_\Delta\upsilon_B}{A_\Delta\upsilon_\Delta} = 2 \;\; ή$

$\frac{2\upsilon_B}{\upsilon_\Delta} = 2 \;\; ή \;\; \frac{\upsilon_B}{\upsilon_\Delta} = 1$

13.58) α) $\Pi_1 = A_1\upsilon_1 \;\; ή \;\; \Pi_1 = \pi\frac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1 \;\; ή \;\; \upsilon_1 = \frac{4\Pi_1}{\pi\delta_1^2}$

ή $\upsilon_1 = 1{,}25m/s$

13.69) α) $\Delta\vec{p}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}+(-\vec{p}_{\alpha\rho\chi})$ ή

$\Delta p=\sqrt{p^2+p^2+2p^2\sigma\upsilon\nu120^\circ}$ ή

$\Delta p=p=\Delta m\upsilon=2\cdot10^{-2}kg\cdot m/s$

β) $F=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=\dfrac{\Delta m\cdot\upsilon}{\Delta t}=\dfrac{\rho\Delta V\cdot\upsilon}{\Delta t}=$

$=\dfrac{\rho A\Delta x\upsilon}{\Delta t}=\rho\dfrac{\pi\delta^2}{4}\upsilon\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\rho\dfrac{\pi\delta^2}{4}\upsilon^2$ ή $F=40\pi N$

13.70) A. $\Pi=A\upsilon_1$ ή $\upsilon_1=\dfrac{\Pi}{A}$ ή $\upsilon_1=20m/s$

β_1) $f_A=\dfrac{\upsilon+\upsilon_1}{\upsilon+\upsilon_s}f_s$ ή $f_A=720Hz$

β_2) $f'_A=\dfrac{\upsilon+\upsilon_1}{\upsilon-\upsilon'_s}f'_s$ ή $f'_A=900Hz$

β_3) $f''_A=\dfrac{\upsilon+\upsilon_1}{\upsilon}f''_s$ ή $f''_A=360Hz$

13.71) A. $F=\left|\dfrac{\Delta p_v}{\Delta t}\right|$ ή

$F=\left|\upsilon_v\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\right|=\upsilon_v\rho_v\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\upsilon_v\rho_v\Pi$

Επειδή $\Pi=A\upsilon_v=\pi r^2\upsilon_v$, έχουμε:

$F=\upsilon_v^2\rho_v\pi r^2$ ή $F=6{,}4\pi N$

B. Ομοίως προκύπτει: $F'=\upsilon_\pi^2\rho_\pi\pi r^2$ ή

$F'=20{,}48\pi N$

Προβλήματα

13.72) α) $\Pi=A_1\upsilon_1=\dfrac{\pi\delta_1^2}{4}\upsilon_1$ ή

$\Pi=0{,}75\pi\cdot10^{-4}m^3/s$

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για μια στοιχειώδη μάζα Δm του νερού από το στόμιο της βρύσης μέχρι το h_1:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w$ ή $\dfrac{1}{2}\Delta m\upsilon_2^2-\dfrac{1}{2}\Delta m\upsilon_1^2=\Delta mgh_1$

ή $\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_1^2+2gh_1}$ ή $\upsilon_2=2m/s$

γ) $\Pi_1=\Pi_2$ ή $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2$ ή $\pi\dfrac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1=\pi\dfrac{\delta_2^2}{4}\upsilon_2$

ή $\delta_2^2=\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\delta_1^2$ ή $\delta_2=\delta_1\sqrt{\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}}$ ή $\delta_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}cm$

13.73) α) $\Pi_1=A_1\upsilon_1=\pi\dfrac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1$ ή $\upsilon_1=\dfrac{4\Pi_1}{\pi\delta_1^2}$ ή

$\upsilon_1=0{,}4m/s$

β) Οι στοιχειώδεις μάζες του νερού εκτελούν κατακόρυφη βολή προς τα κάτω. Επομένως:

$\upsilon_2=\upsilon_1+gt_1$ ή $\upsilon_2=1m/s$

γ) $\Pi_1=\Pi_2$ ή $A_1\upsilon_1=A_2\upsilon_2$ ή $\pi\dfrac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1=\pi\dfrac{\delta_2^2}{4}\upsilon_2$

ή $\delta_2=\delta_1\sqrt{\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}}$ ή $\delta_2=0{,}4\sqrt{10}cm$

δ) $\Pi_1=\Pi_3$ ή $\pi\dfrac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1=\pi\dfrac{\delta_3^2}{4}\upsilon_3$ ή $\upsilon_3=\dfrac{\delta_1^2}{\delta_3^2}\upsilon_1$ ή

$\upsilon_3=2m/s$

$\upsilon_3=\upsilon_1+gt_2$ ή $t_2=\dfrac{\upsilon_3-\upsilon_1}{g}$ ή $t_2=0{,}16s$

$h_1=\upsilon_1t_2+\dfrac{1}{2}gt_2^2$ ή $h_1=0{,}192m$

$h'=h-h_1=3m$

13.74) α) $\Pi_1=A_1\upsilon_1=\pi\dfrac{\delta_1^2}{4}\upsilon_1$ ή

$\Pi_1=0{,}2\pi\cdot10^{-4}m^3/s$

Ομοίως: $\Pi_2=\pi\dfrac{\delta_2^2}{4}\upsilon_2$ ή

$\Pi_2=0{,}225\pi\cdot10^{-4}m^3/s$

β) Για $t_1=10min=600s$ έχουμε:

$\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2$ ή $\Delta V=\Pi_1t_1+\Pi_2t_1$ ή

$\Delta V=(\Pi_1+\Pi_2)t_1$ ή

$\Delta V=2{,}55\cdot10^{-2}m^3$

γ) $h_2=\upsilon_2t_2+\dfrac{1}{2}gt_2^2$ ή $5{,}1=0{,}1t_2+5t_2^2$ ή

$5t_2^2+0{,}1t_2-5{,}1=0$ ή $t_2=1s$

$h_1=\upsilon_1t_2+\dfrac{1}{2}gt_2^2$ ή $h_1=5{,}2m$

δ) $\upsilon'_1=\upsilon_1+gt_2$ ή $\upsilon'_1=10{,}2m/s$

$\upsilon'_2=\upsilon_2+gt_2$ ή $\upsilon'_2=10{,}1m/s$

$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} = 0{,}2m$

β$_1$) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Β και Γ που βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή και είναι μακριά το ένα από το άλλο.

$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_B^2$ ή

$p_B - p_\Gamma = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2$ ή $\rho_v g \Delta h_1 = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1^2$ ή

$\Delta h_1 = \frac{\rho_\alpha \upsilon_1^2}{2\rho_v g}$ ή $\Delta h_1 = 0{,}216m$

β$_2$) $\Delta h_2 = \frac{\rho_\alpha \upsilon_2^2}{2\rho_v g}$ ή $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2\rho_v g \Delta h_2}{\rho_\alpha}}$ ή

$\upsilon_2 = 40m/s$

Γ. Έστω ότι η στήλη του νερού μετατοπίζεται κατά x. Η συνολική δύναμη που δέχεται το νερό είναι:

$\Sigma F = -\rho_v g 2xA$ ή $\Sigma F = -Dx$, με $D = 2\rho_v g A$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ή $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho_v g A}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{5}\cdot 10^{-3} s$

14.126) α) $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$ ή $U_{\varepsilon\lambda} = 16J$

$F_{\varepsilon\lambda} = kx$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 160N$

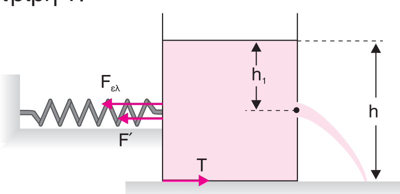
β) Από το θεώρημα Torricelli υπολογίζουμε την ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή:

$\upsilon = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{10}m/s$

$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\upsilon \Delta m}{\Delta t} = \upsilon\rho\frac{\Delta V}{\Delta t} = \upsilon\rho\Pi = \rho\upsilon^2 A_1$ ή

$F = 10N$

γ) Στο δοχείο ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$, η δύναμη F' από το εξερχόμενο νερό για την οποία ισχύει $|F'| = |F|$ και η οριακή στατική τριβή Τ.



Εφόσον το δοχείο ισορροπεί, ισχύει:

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} + F' = T$ ή $F_{\varepsilon\lambda} + F = \mu_s N$ ή

$\mu_s = \frac{F_{\varepsilon\lambda} + F}{w}$ ή $\mu_s = \frac{F_{\varepsilon\lambda} + F}{\rho V g}$ ή $\mu_s = \frac{F_{\varepsilon\lambda} + F}{\rho A h g}$

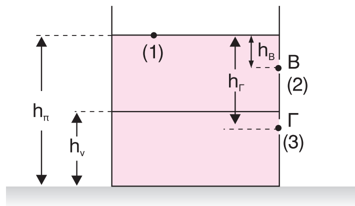
ή $\mu_s = 0{,}017$

14.127) α) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1) και (2) και για τα σημεία (1) και (3). Επειδή $\upsilon_1 = 0$ και $p_1 = p_2 = p_3 = p_{at}$, έχουμε:

$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_1^2 + \rho_\pi g h_B = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_2^2$ ή

$\frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_2^2 = \rho_\pi g h_B$ ή $\upsilon_2 = \sqrt{2gh_B}$ ή

$\upsilon_2 = 2m/s$



Ομοίως:

$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_1^2 + \rho_\pi g(h_\pi - h_v) + \rho_v g(h_\Gamma - h_\pi + h_v) =$

$= p_3 + \frac{1}{2}\rho_v \upsilon_3^2$ ή

$\frac{1}{2}\rho_v \upsilon_3^2 = \rho_\pi g(h_\pi - h_v) + \rho_v g(h_\Gamma - h_\pi + h_v)$ ή

$\upsilon_3 = 3m/s$

β) $\frac{\Pi_B}{\Pi_\Gamma} = \frac{A_B \upsilon_2}{A_\Gamma \upsilon_3} = \frac{2A_\Gamma \upsilon_2}{A_\Gamma \upsilon_3}$ ή $\frac{\Pi_B}{\Pi_\Gamma} = \frac{4}{3}$

γ) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για μία στοιχειώδη μάζα πετρελαίου που εξέρχεται από την οπή στο σημείο Β μέχρι να φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο έχουμε:

$\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = mg(h_\pi - h_B)$ ή

$\upsilon_2' = \sqrt{\upsilon_2^2 + 2g(h_\pi - h_B)}$ ή

$\upsilon_2' = 2\sqrt{5}m/s$

Ομοίως για το νερό έχουμε:

$$\frac{1}{2}mυ_3'^2 - \frac{1}{2}mυ_3^2 = mg(h_π - h_Γ) \quad ή$$

$$υ_3' = \sqrt{υ_3^2 + 2g(h_π - h_Γ)} \quad ή$$

$$υ_3' = 3\sqrt{2}m/s$$

Επομένως: $\frac{υ_2'}{υ_3'} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

14.128) α$_1$) Έστω ένα σημείο Α στην ελεύθερη επιφάνεια του δοχείου. Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Α και Δ, που είναι στην ίδια ρευματική γραμμή.

$$p_A + \frac{1}{2}ρυ_A^2 + ρg\frac{h}{2} = p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2$$

Επειδή $p_A = p_Δ = p_{at}$ και $υ_A = 0$, έχουμε:

$$ρg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 \quad ή \quad υ_Δ = \sqrt{gh} \quad ή \quad υ_Δ = 3m/s$$

α$_2$) $A_Bυ_B = A_Δυ_Δ$ ή $υ_B = υ_Δ$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Β και Δ:

$$p_B + \frac{1}{2}ρυ_B^2 = p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 \quad ή \quad p_B = p_Δ \quad ή$$

$$p_B = p_{at} = 10^5 Pa$$

$A_Γυ_Γ = A_Δυ_Δ$ ή $υ_Γ = υ_Δ$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Γ και Δ:

$$p_Γ + \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 + ρg\frac{h}{3} = p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 \quad ή$$

$$p_Γ = p_Δ - ρg\frac{h}{3} \quad ή$$

$$p_Γ = 0,97 \cdot 10^5 Pa$$

α$_3$) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Δ και Ε:

$$p_Δ + \frac{1}{2}ρυ_Δ^2 + ρg\frac{h}{2} = p_E + \frac{1}{2}ρυ_E^2 \quad ή$$

$$υ_E = \sqrt{υ_Δ^2 + gh} \quad ή$$

$$υ_E = 3\sqrt{2}m/s$$

β$_1$) $\frac{h}{2} = υ_Δ t + \frac{1}{2}gt^2$ ή $5t^2 + 3t - 0,45 = 0$ ή

$t = 0,123s$

β$_2$) $2A = \frac{h}{2}$ ή $A = \frac{h}{4} = 0,225m$,

Θ.Ι. $ΣF = 0$ ή $mg = kA$ ή $m = \frac{kA}{g} = 9kg$

$$T = 2π\sqrt{\frac{m}{k}} \quad ή \quad T = \frac{3π}{10}s$$

β$_3$) $ω = \frac{2π}{T}$ ή $ω = \frac{20}{3}rad/s$

$$υ = ωAσυν(ωt + φ_0) \quad ή$$

$$υ = 1,5συν\left(\frac{20}{3}t + \frac{3π}{2}\right) \text{ SI}$$

14.129) α) $\frac{K}{V} = \frac{1}{2}ρυ^2$ ή $\frac{K}{V} = 240J/m^3$

β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για δύο σημεία (1) και (2) της ίδιας ρευματικής γραμμής κάτω από την πλάκα και μακριά από αυτή αντίστοιχα.

$$p_1 + \frac{1}{2}ρυ_1^2 = p_{at} \quad ή \quad p_{at} - p_1 = \frac{1}{2}ρυ^2 \quad ή$$

$$p_{at} - p_1 = 240Pa$$

Ο αέρας ασκεί στην πλάκα κατακόρυφη δύναμη με μέτρο:

$$F' = (p_{at} - p_1)A \quad ή \quad F' = (p_{at} - p_1)αβ \quad ή$$

$$F' = 2.400N$$

Εφόσον η πλάκα ισορροπεί, έχουμε:

$$ΣF = 0 \quad ή \quad 2T = w + F' \quad ή$$

$$T = \frac{w + F'}{2} = \frac{mg + F'}{2} \quad ή$$

$$T = 1.250N$$

γ) $T = \frac{mg + F}{2} = \frac{mg + (p_{at} - p_1)αβ}{2} = \frac{mg + \frac{1}{2}ρυ^2 A}{2}$

ή $T = \frac{mg}{2} + \frac{1}{4}ρAυ^2$ ή $T = 50 + 3υ^2$ SI

Για $υ_0 = 0m/s$ έχουμε: $T = 50N$

Για $υ_1 = 40m/s$ έχουμε: $T_1 = 4.850N$

$p_\Gamma = p_{at} + \frac{1}{2}\rho_v(\upsilon_\Delta^2 - \upsilon_\Gamma^2) - \rho_v gh$ ή

$p_\Gamma = 0{,}75 \cdot 10^5 Pa$

δ) $p_\Delta + \frac{1}{2}\rho_v\upsilon_\Delta^2 + \rho_v gh = p_Z + \frac{1}{2}\rho_v\upsilon_Z^2$ ή

$\upsilon_Z = \sqrt{\upsilon_\Delta^2 + 2gh}$ ή $\upsilon_Z = 3\sqrt{10} m/s$

$\left(\frac{K}{V}\right)_Z = \frac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2$ ή $\left(\frac{K}{V}\right)_Z = 45 \cdot 10^3 J/m^3$

14.135) α) Όταν σταθεροποιείται η στάθμη του νερού στο δοχείο Α, ισχύει:

$\Pi_1 = \Pi_{οπής(1)}$ ή $\Pi_1 = A_1\upsilon_1$ ή $\Pi_1 = 6 \cdot 10^{-4} m^3/s$

$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$ ή $h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2g}$ ή $h_1 = 0{,}45m$

β) $\Pi_{οπής(1)} = \Pi_{οπής(2)}$ ή $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ ή

$\upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\upsilon_1$ ή $\upsilon_2 = 6m/s$

Έστω h_2' η απόσταση της οπής (2) από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο Β.

$\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2'}$ ή $h_2' = \frac{\upsilon_2^2}{2g}$ ή $h_2' = 1{,}8m$

Άρα: $h_2 = h' + h_2' = 2{,}6m$

γ) $\left(\frac{K}{V}\right)_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$ ή $\left(\frac{K}{V}\right)_2 = 18 \cdot 10^3 J/m^3$

δ) $p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g(h' + h) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + p_\Gamma$ ή

$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_2^2 + 2g(h' + h)}$ ή $\upsilon_\Gamma = 8m/s$

$A_2\upsilon_2 = A_\Gamma\upsilon_\Gamma$ ή $A_\Gamma = \frac{A_2\upsilon_2}{\upsilon_\Gamma}$ ή

$A_\Gamma = 0{,}75 \cdot 10^{-4} m^2$

14.136) α) $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$ ή $\upsilon_1 = 4m/s$

$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\Pi}{A_1\upsilon_1} = 2$

β) $\Pi = \Pi_1'$ ή $\Pi = A_1\upsilon_1'$ ή $\upsilon_1' = \frac{\Pi}{A_1}$ ή

$\upsilon_1' = 8m/s$

$\left(\frac{K}{V}\right)_1' = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2$ ή $\left(\frac{K}{V}\right)_1' = 32 \cdot 10^3 J/m^3$

γ) $\upsilon_1' = \sqrt{2gh_1'}$ ή $h_1' = \frac{\upsilon_1'^2}{2g}$ ή $h_1' = 3{,}2m$

$h' = (h - h_1) + h_1' = 3{,}4m$

δ) $\Delta m = \rho\Delta V = \rho A\Delta h = \rho A(h' - h) = 2{,}4 \cdot 10^3 kg$

ε) $t_1 = t_2 = t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$m = \rho V = \rho\Pi t = \rho A\upsilon t$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho A_1\upsilon_1 t}{\rho A_1\upsilon_1' t} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_1'} = \frac{1}{2}$

14.137) α_1) Η πίεση στον πυθμένα είναι:

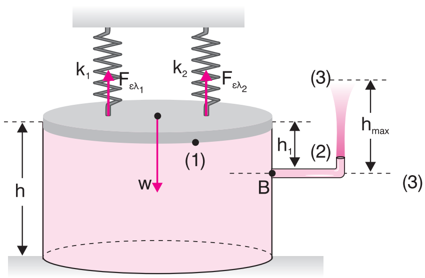
$p = p_{at} + p_{υδρ} + \frac{w - F_{ελ_1} - F_{ελ_2}}{A}$ ή

$p = p_{at} + \rho gh + \frac{mg}{A} - \frac{2k_1x}{A}$

Άρα: $F = pA$ ή $F = p_{at}A + \rho ghA + mg - 2k_1x$

ή $k_1 = \frac{p_{at}A + \rho ghA + mg - F}{2x}$ ή

$k_1 = 400N/m,\ k_2 = 400N/m$



α_2) $U = U_1 + U_2 = 2\frac{1}{2}k_1x^2$ ή $U = 16J$

β_1) $p_1 + \rho gh_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_{at}$ ή

$p_{at} + \frac{w - 2F_{ελ_1}}{A} + \rho gh_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + p_{at}$ ή

$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(mg - 2k_1x)}{A\rho} + 2gh_1}$ ή $\upsilon_1 = 2\sqrt{10} m/s$

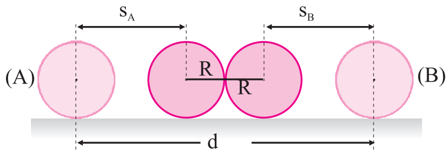
$\left(\frac{K}{V}\right)_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$ ή $\left(\frac{K}{V}\right)_1 = 2 \cdot 10^4 J/m^3$

$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu_1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu_2}}$ και για $N_1 = 5$ έχουμε $N_2 = 2{,}5$ περιστροφές

γ) $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t$

Για t = 4s: $\omega_1 = 40$rad/s και $\omega_2 = 20$rad/s

16.78) α)



Όταν έρχονται σε επαφή οι δύο τροχοί, έχουν διανύσει αποστάσεις s_A και s_B αντίστοιχα και ισχύει: $s_A + s_B = d - 2R = 10$m (1)

$$s_A = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\left|\alpha_{cm_A}\right| t^2 \quad (2)$$

$$s_B = \frac{1}{2}\alpha_{cm_B} t^2 \quad (3)$$

Από (1), (2), (3): t = 1s

β) Για t = 1s: $\upsilon_A = \upsilon_0 - \alpha_{cm_A} t = 8\,m/s$

$$\upsilon_B = \alpha_{cm_B} t = 2\,m/s$$

γ) $N = \frac{s_A}{2\pi R} + \frac{s_B}{2\pi R} = \frac{s_A + s_B}{2\pi R} = \frac{10}{\pi}$ περιστροφές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17ο

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ – ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

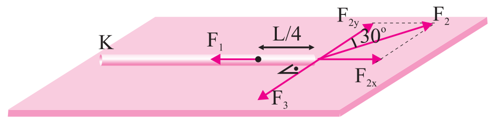
17.9β, 17.10γ, 17.11β, 17.12β, 17.13δ, 17.14α, 17.15γ, 17.16γ, 17.17β, 17.18α, 17.19γ, 17.20β, 17.21γ, 17.22γ, 17.23δ, 17.24β, 17.25β

Ερωτήσεις κατανόησης

17.26α, 17.27γ, 17.28γ, 17.29β, 17.30α, 17.31β, 17.32β, 17.33α, 17.34γ, 17.35β, 17.36β, 17.37α, 17.38α, 17.39β, 17.40γ, 17.41α, 17.42γ, 17.43β, 17.44α, 17.45β, 17.46β, 17.47β, 17.48α, 17.49α, 17.50γ, 17.51β

Ασκήσεις

17.52)



α) $\tau_{F_1} = 0,\ \tau_{F_{2x}} = 0,$

$$\tau_{F_{2y}} = F_2 \sigma\upsilon\nu 30^\circ L = 5\sqrt{3}\ N\cdot m,$$

$$\tau_{F_3} = -F_3 L = -10 N\cdot m$$

β) $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_{2x}} + \tau_{F_{2y}} + \tau_{F_3} = -1{,}339 N\cdot m$

17.53) $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} + \tau_w =$

$$= 0 - F_2 \cdot \Gamma K - F_3 \eta\mu 30^\circ BK + w\cdot OK =$$

$$= -100 N\cdot m$$

17.54) Οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.

$$\Sigma\tau = F(r_1 + r_2) = 60 N\cdot m$$

17.55) α) $\Sigma\tau_{(K)} = \tau_{F_1} + \tau_{F_4} = F_1\frac{\alpha}{2} + F_4\frac{\alpha}{2} = F\alpha$

β) $\Sigma\tau_{(\Delta)} = \tau_{F_3} + \tau_{F_4} = F_3 \eta\mu 45^\circ \alpha + F_4 \alpha =$

$$= F\alpha\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

17.56) $\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $K\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$