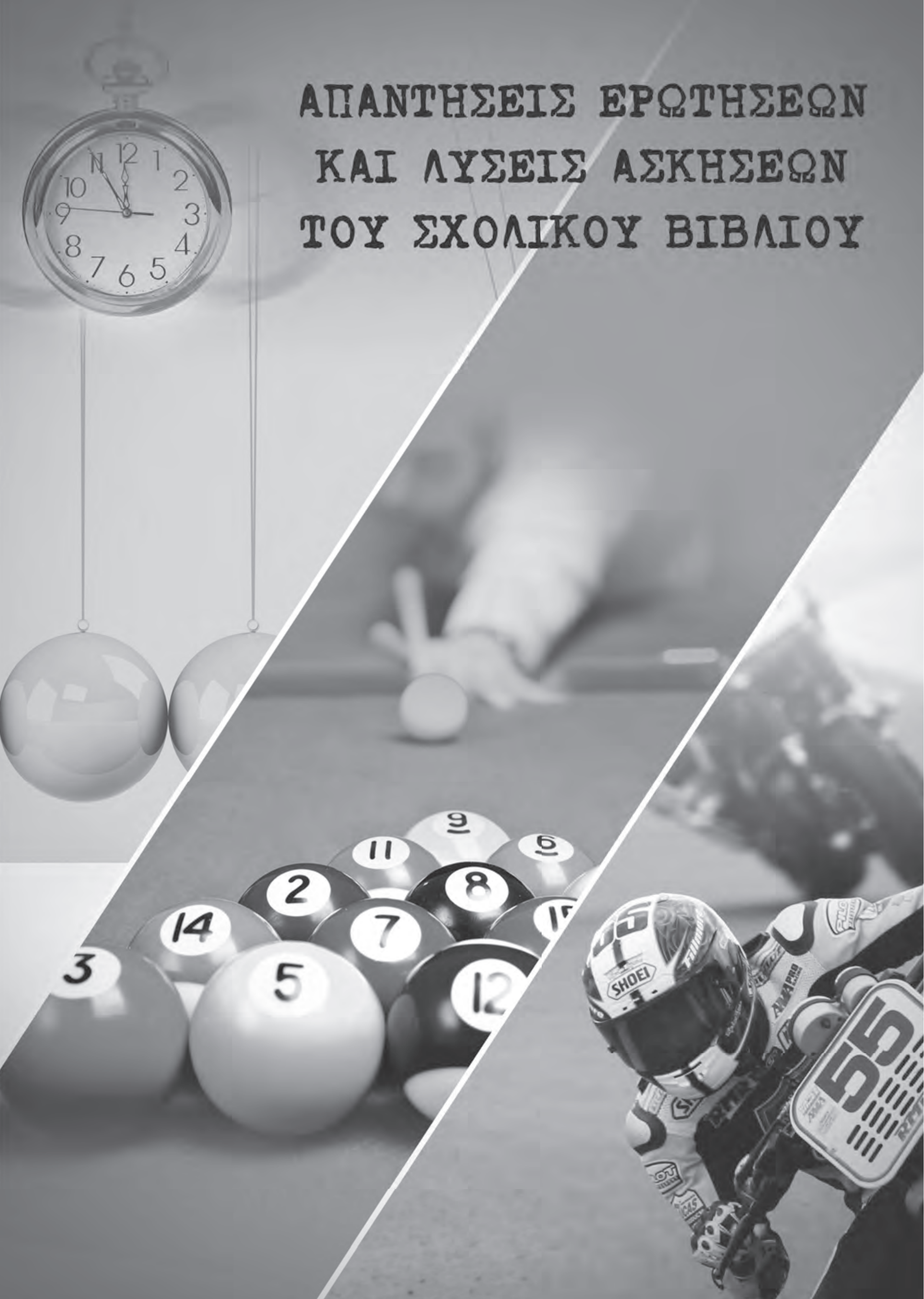
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ερωτήσεις

5.1) Επειδή η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος, είναι δυνατόν ένα σύστημα σωμάτων που κινούνται να έχουν μηδενική συνολική ορμή, αλλά η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Για παράδειγμα, έστω δύο σώματα με ίσες μάζες και αντίθετες ταχύτητες. Για το σύστημα των σωμάτων ισχύει:

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ή $p = 0$

$K = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2$ ή $K = mu^2 \neq 0$

Όταν πρόκειται για ένα σώμα, αν έχει κινητική ενέργεια διαφορετική του μηδενός σημαίνει ότι κινείται. Άρα, η ορμή του είναι και αυτή διάφορη του μηδενός.

5.2) 6, 9, 3, 3

5.3) γ

5.4) α

5.5) γ

5.6) Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, εάν η κρούση ήταν ελαστική θα έπρεπε να ανταλλάξουν ταχύτητες, δηλαδή θα έπρεπε να είναι $\upsilon_1{}' = \upsilon_2 = 20\ \text{m/s}$.

Επειδή $\upsilon_1{}' = 16\ \text{m/s}$, η κρούση δεν είναι ελαστική.

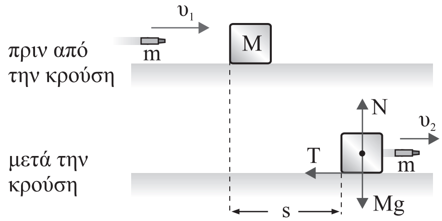
5.7) δ

5.8) α, β, δ

5.9) δ

Ασκήσεις

5.22) α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα:



$m\upsilon_1 = m\upsilon_2 + M\upsilon$ ή $\upsilon = \dfrac{m(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{M}$ ή

$\upsilon = 20\ \text{m/s}$

β) $\Delta E = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}$ ή

$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2\right) - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$ ή

$\Delta E = -13.600\ \text{J}$

γ) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας M από τη θέση που έγινε η σύγκρουση μέχρι να σταματήσει, έχουμε:

$K_\tau - K_\alpha = -Ts$ ή $0 - \frac{1}{2}M\upsilon^2 = -\mu Ns$ ή

$\frac{1}{2}M\upsilon^2 = \mu Mg \cdot s$ ή $s = \dfrac{\upsilon^2}{2\mu g}$ ή $s = 40\ \text{m}$

5.23) $\upsilon_1{}' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \dfrac{m - 3m}{m + 3m}\upsilon = -6\ \text{m/s}$

$\upsilon_2{}' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \dfrac{2m}{m + 3m}\upsilon = 6\ \text{m/s}$

5.24) Θεωρούμε θετική τη φορά κίνησης του σώματος μάζας m_1.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα, έχουμε:

$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\sigma$ ή

$\upsilon_\sigma = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$ ή $\upsilon_\sigma = -0{,}33\ \text{m/s}$

(Το συσσωμάτωμα κινείται στην αρνητική κατεύθυνση.)

$$\pi_K\,\% = \frac{|\Delta K|}{K_{αρχ}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_σ^2 - \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - \frac{1}{2}m_2υ_2^2\right|}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2}\,100\%$$

ή $\pi_K\,\% = 98\ \%$

5.25) α) $υ_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$ ή $\frac{υ_1}{3} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$

ή $3(m_1-m_2) = m_1+m_2$ ή $2m_1 = 4m_2$ ή

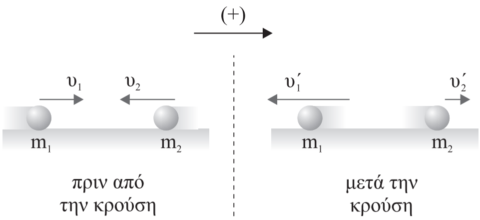
$m_2 = \frac{m_1}{2} = 0{,}5\ \text{kg}$

β) $υ_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$ ή $-\frac{υ_1}{3} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$ ή

$3(m_1-m_2) = -m_1-m_2$ ή $4m_1 = 2m_2$ ή

$m_2 = 2m_1 = 2\ \text{kg}$

5.26) Θεωρούμε θετική τη φορά κίνησης της σφαίρας μάζας m_1 πριν από την κρούση, άρα $υ_1 = 4\ \text{m/s}$ και $υ_2 = -5\ \text{m/s}$.



$$υ_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}υ_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 \text{ ή } υ_1' = -8\ \text{m/s}$$

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}υ_2 \text{ ή } υ_2' = 1\ \text{m/s}$$

5.27) Η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει η σφαίρα μάζας m_2 μετά την κρούση είναι η κινητική ενέργεια που είχε το σύστημα πριν από την κρούση, δηλαδή: $K_2' = K_1$

Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση πρέπει να ακινητοποιηθεί η σφαίρα μάζας m_1, δηλαδή οι δύο σφαίρες να ανταλλάξουν ταχύτητες. Αυτό συμβαίνει όταν $m_1 = m_2$.

5.28) Θέτοντας m τη μάζα του νετρονίου, η μάζα του πυρήνα του πρωτίου (^1_1H: 1 πρωτόνιο) είναι m, του δευτερίου (^2_1H: 1 πρωτόνιο και 1 νετρόνιο) είναι 2m και του ηλίου (^4_2He: 2 πρωτόνια και 2 νετρόνια) είναι 4m.

α) $υ_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 = 0$

$$\pi_{K_1}\,\% = \frac{|K_1'-K_1|}{K_1}\cdot 100\% = \frac{K_1}{K_1}\,100\% = 100\,\%$$

β) $υ_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 = \frac{m-2m}{m+2m}υ_1 = -\frac{υ_1}{3}$

$$\pi_{K_1}\,\% = \frac{|K_1'-K_1|}{K_1}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{2}m\frac{υ_1^2}{9} - \frac{1}{2}mυ_1^2\right|}{\frac{1}{2}mυ_1^2}\,100\% = 88{,}9\ \%$$

γ) $υ_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 = \frac{m-4m}{m+4m}υ_1 = \frac{3}{5}υ_1$

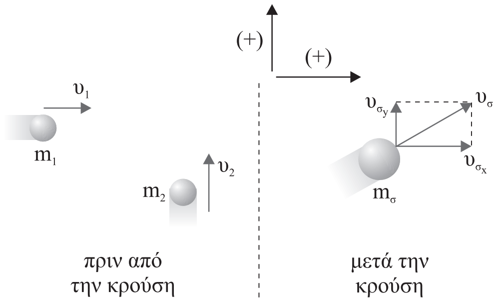
$$\pi_{K_1}\,\% = \frac{|K_1'-K_1|}{K_1}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{2}m\frac{9}{25}υ_1^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2\right|}{\frac{1}{2}mυ_1^2}\,100\% = 64\ \%$$

5.29) α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στους άξονες x′x και y′y.

Για τον x′x: $m_1υ_1 = m_συ_{σ_x}$ ή $υ_{σ_x} = \frac{m_1υ_1}{m_1+m_2}$

ή $υ_{σ_x} = 4{,}8\ \text{m/s}$



Για τον $y'y$: $m_2\upsilon_2 = m_\sigma \upsilon_{\sigma_y}$ ή $\upsilon_{\sigma_y} = \dfrac{m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}$

ή $\upsilon_{\sigma_y} = 3{,}6$ m/s

$\upsilon_\sigma = \sqrt{\upsilon_{\sigma_x}^2 + \upsilon_{\sigma_y}^2}$ ή $\upsilon_\sigma = 6$ m/s

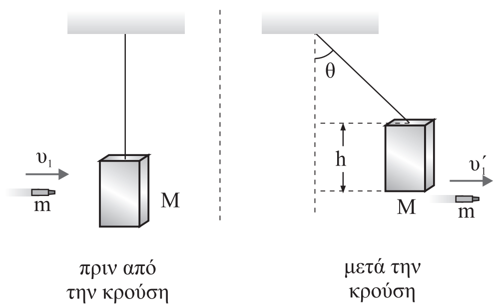
$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\upsilon_{\sigma_y}}{\upsilon_{\sigma_x}}$ ή $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{3}{4}$

β) $\Delta K = K_\sigma - (K_1 + K_2) =$

$= \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\sigma^2 - \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$ ή

$\Delta K = -174$ J

5.30) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:



$m\upsilon_1 = m\upsilon_2 + M\upsilon$ ή $\upsilon = \dfrac{m\upsilon_1 - m\upsilon_2}{M}$ ή

$\upsilon = 4{,}4$ m/s

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για την πλάκα από την κατακόρυφη θέση μέχρι τη θέση όπου σταματά στιγμιαία, έχουμε:

$0 - \dfrac{1}{2}M\upsilon^2 = -Mgh$ ή $h = \dfrac{\upsilon^2}{2g}$ ή $h = 0{,}968$ m

$\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\ell - h}{\ell}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}516$ ή $\theta \simeq 60^o$

Προβλήματα

5.41) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε:

$m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{\upsilon}_1' + m\vec{\upsilon}_2'$ ή $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{\upsilon}_2'$

Αν θ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$, έχουμε:

$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2 + 2\upsilon_1'\upsilon_2'\sigma\upsilon\nu\theta$ (1)

Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας, έχουμε:

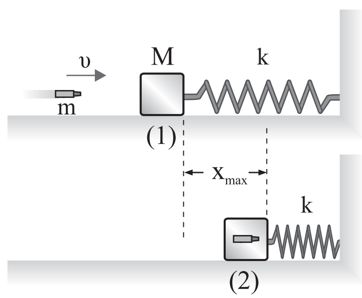
$\dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \dfrac{1}{2}m\upsilon_2'^2$ ή $\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ή $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ rad

5.42) α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, έχουμε:

$m\upsilon = (M+m)\upsilon'$ ή $\upsilon' = \dfrac{m\upsilon}{M+m}$ ή $\upsilon' = 10$ m/s



Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση (1) μέχρι τη θέση (2) προκύπτει:

$$0-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2=-\frac{1}{2}kx^2_{max} \text{ ή}$$

$$x_{max}=\sqrt{\frac{M+m}{k}}\upsilon' \text{ ή } x_{max}=0{,}1\,m$$

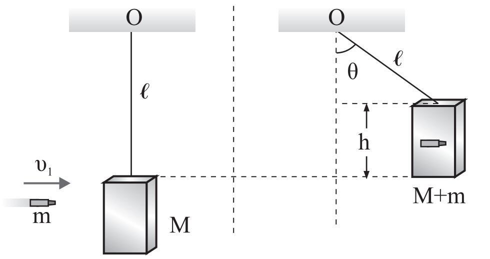
β) $$\pi_E\,\%=\frac{|\Delta E|}{E_{αρχ}}100\%=$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}kx^2_{max}-\frac{1}{2}m\upsilon^2\right|}{\frac{1}{2}m\upsilon^2}100\%=95\ \%$$

5.43) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m\upsilon_1=(M+m)\upsilon \text{ ή } \upsilon_1=\frac{(M+m)}{m}\upsilon,$$

όπου υ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση



πριν από την κρούση

μετά την κρούση

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από την κατακόρυφη θέση μέχρι τη θέση που σταματά στιγμιαία, έχουμε:

$$0-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2=W_w \text{ ή}$$

$$-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2=-(M+m)gh \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2=g(\ell-\ell συνθ) \text{ ή } \upsilon=\sqrt{2g\ell(1-συνθ)}$$

$$E_{αρχ}=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m\frac{(M+m)^2}{m^2}\upsilon^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(M+m)^2}{m}\cdot 2g\ell(1-συνθ)$$

$$E_{τελ}=(M+m)gh=(M+m)g\ell(1-συνθ)$$

$$|\Delta E|=E_{αρχ}-E_{τελ}=$$

$$=\frac{(M+m)^2}{m}g\ell(1-συνθ)-(M+m)g\ell(1-συνθ)$$

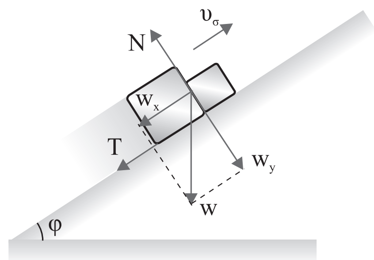
$$=(M+m)g\ell(1-συνθ)\left[\frac{M+m}{m}-1\right] \text{ ή}$$

$$|\Delta E|=255\ J$$

5.44) α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_2\upsilon=(m_1+m_2)\upsilon_σ \text{ ή } \upsilon_σ=\frac{m_2\upsilon}{m_1+m_2} \text{ ή}$$

$$\upsilon_σ=6\ m/s$$



Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει στιγμιαία, έχουμε:

$$0-K_{αρχ}=W_w+W_T \ (1)$$

$$W_w=-(m_1+m_2)gημφs \ (2),$$

$$W_T=-Ts=-\mu Ns=$$

$$=-\mu(m_1+m_2)gσυνφs \ (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\sigma^2 =$$
$$=-(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi s-\mu(m_1+m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi s$$
$$\acute{\eta}\ \frac{\upsilon_\sigma^2}{2}=s(g\eta\mu\varphi+\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi)\ \acute{\eta}$$
$$s=\frac{\upsilon_\sigma^2}{2g\eta\mu\varphi+2\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi}\ \acute{\eta}\ s=1{,}8\ m$$

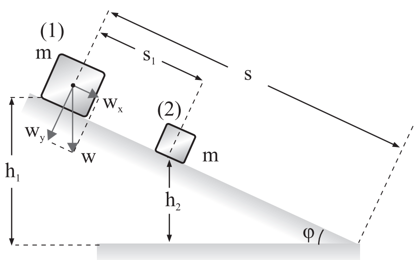
β) Για να επιστρέψει το συσσωμάτωμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, πρέπει η συνιστώσα w_x του βάρους του συσσωματώματος να είναι μεγαλύτερη από το όριο της στατικής τριβής, που τη θεωρούμε ίση με την τριβή ολίσθησης.

$w_x=(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi=250\ N$,

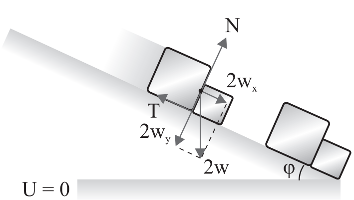
$T=\mu N=\mu(m_1+m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi=250\ N$

Επειδή $w_x=T$, το συσσωμάτωμα δεν επιστρέφει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

5.45)



πριν από την κρούση



μετά την κρούση

α) Αν υ_1 η ταχύτητα του σώματος πριν από την κρούση και υ_σ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής, έχουμε:

$$m\upsilon_1=(m+m)\upsilon_\sigma\ \acute{\eta}\ \upsilon_1=2\upsilon_\sigma\ \acute{\eta}\ \upsilon_\sigma=\frac{\upsilon_1}{2}\ (1)$$

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα (1) από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τη θέση της σύγκρουσης, έχουμε:

$$K_2-K_1=W_w\ \acute{\eta}\ \frac{1}{2}m\upsilon_1^2-0=mg\eta\mu\varphi s_1\ \acute{\eta}$$
$$\upsilon_1=\sqrt{2g\eta\mu\varphi s_1}\ (2)$$

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση σύγκρουσης μέχρι τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:

$$0-\frac{1}{2}(m+m)\upsilon_\sigma^2=W_w+W_T\ \acute{\eta}$$
$$-\frac{1}{2}2m\upsilon_\sigma^2=2mg\eta\mu\varphi(s-s_1)-T(s-s_1)\ (3)$$
$$T=\mu N\ \acute{\eta}\ T=\mu\left(w_{1_y}+w_{2_y}\right)\ \acute{\eta}$$
$$T=\mu\cdot 2mg\sigma\upsilon\nu\varphi\ (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$-m\frac{\upsilon_1^2}{4}=2mg\eta\mu\varphi(s-s_1)-\mu 2mg\sigma\upsilon\nu\varphi(s-s_1)$$
$$\acute{\eta}\ \mu=\frac{2mg\eta\mu\varphi(s-s_1)+\dfrac{mg\eta\mu\varphi\, s_1}{2}}{2mg\sigma\upsilon\nu\varphi(s-s_1)}\ \acute{\eta}$$
$$\mu=\frac{2\eta\mu\varphi(s-s_1)+\dfrac{\eta\mu\varphi\, s_1}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\varphi(s-s_1)}\ \acute{\eta}\ \mu=\frac{5\sqrt{3}}{13}$$

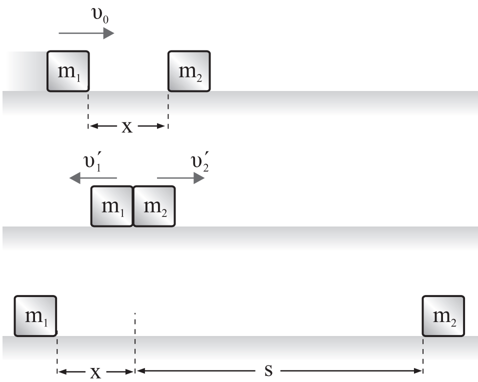
β) $Q=|\Delta E|=E_{\alpha\rho\chi}-E_{\tau\varepsilon\lambda}=$
$=mgh_1+mgh_2-0=$
$=mgs\eta\mu\varphi+mg(s-s_1)\eta\mu\varphi$

ή $|\Delta E|=34\ J$

5.47) α) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από την αρχική του θέση μέχρι τη θέση σύγκρουσης, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 = W_T \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 = -\mu m_1 g x \ (1)$$



Η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, άρα:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad ή \quad \upsilon_1' = -\frac{\upsilon_1}{3} \ (2)$$

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει, έχουμε:

$$0 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1'^2 = W_T \quad ή \quad -\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1'^2 = -\mu m_1 g x \quad ή$$

$$\upsilon_1' = \sqrt{2\mu g x} \ (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 = -\mu m_1 g x \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m_1 \left(3\sqrt{2\mu g x}\right)^2 - \frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 = -\mu m_1 g x \quad ή$$

$$18\mu g x - \upsilon_0^2 = -2\mu g x \quad ή \quad \upsilon_0^2 = 20\mu g x \quad ή$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{20\mu g x} \quad ή \quad \upsilon_0 = 10 \text{ m/s}$$

β) $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon_1 = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2\mu g x} =$

$= 2\sqrt{10}$ m/s

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 από τη θέση της σύγκρουσης μέχρι να σταματήσει, προκύπτει:

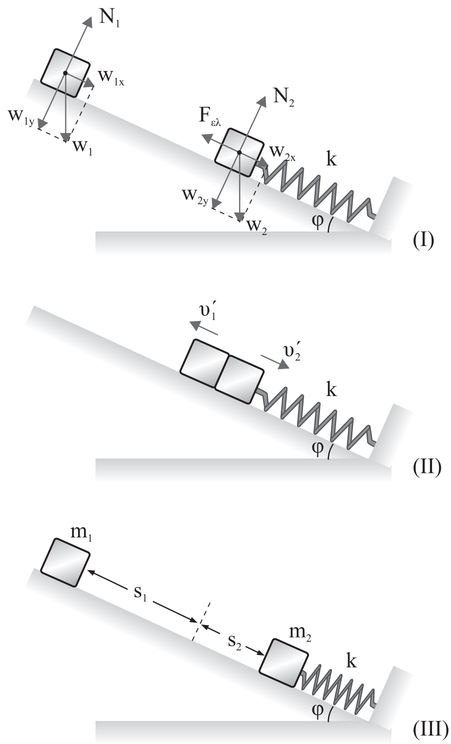
$$0 - \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2 = W_T \quad ή \quad -\frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2 = -\mu m_2 g s \quad ή$$

$$s = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} \quad ή \quad s = 4 \text{ m}$$

5.48) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για το m_1 από την αρχική του θέση μέχρι τη θέση της σύγκρουσης, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 - 0 = W_{w_1} \quad ή \quad \frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2 = m_1 g ημφ \ell \quad ή$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g ημφ \ell} \quad ή \quad \upsilon_1 = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$



Μετά τη σύγκρουση οι ταχύτητες των σωμάτων είναι:

$$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 \text{ ή } υ'_1 = -\frac{υ_1}{2} = -\sqrt{10} \text{ m/s}$$

$$υ'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 \text{ ή } υ'_2 = \frac{υ_1}{2} = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση (ΙΙ) μέχρι τη θέση (ΙΙΙ):

$$0 - \frac{1}{2} m_1 υ'^2_1 = -W_{w_1} \text{ ή } \frac{1}{2} m_1 υ'^2_1 = m_1 g ημφ\, s_1 \text{ ή}$$

$$s_1 = \frac{υ'^2_1}{2gημφ} \text{ ή } s_1 = 1 \text{ m}$$

Στη θέση (Ι) πριν από την κρούση ισχύει:

$$F_{ελ} = w_{2_x} \text{ ή } kx_1 = m_2 g ημφ \text{ ή } x_1 = 0{,}025 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 από τη θέση (ΙΙ) μέχρι τη θέση (ΙΙΙ):

$$0 - \frac{1}{2} m_2 υ'^2_2 = W_{w_2} + W_{F_{ελ}} \text{ ή}$$

$$-\frac{1}{2} m_2 υ'^2_2 = m_2 g ημφ\, s_2 + \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k \left(s_2 + x_1\right)^2$$

$$\text{ή } 100 s_2^2 = 5 \text{ ή } s_2 = 0{,}1\sqrt{5} \text{ m}$$

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ερωτήσεις

Κινηματική της περιστροφής

4.1) δ

4.2) $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = 0$, επειδή στην ομαλή στροφική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα δε μεταβάλλεται.

4.3) γ

4.4) β, γ

4.5) Ναι. Για παράδειγμα, έστω ένα σώμα αρχικά ακίνητο που τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Τη στιγμή $t = 0$ η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν ενώ η γωνιακή του επιτάχυνση διαφορετική του μηδενός.

4.6) Όχι. Εάν υπήρχε ένα τέτοιο σημείο Α που είχε πάντα ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας Κ του σώματος, το ευθύγραμμο τμήμα ΚΑ θα μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό του και επομένως το σώμα θα κάνει μεταφορική και όχι σύνθετη κίνηση.

Ροπή – ισορροπία στερεού

4.7) την απόσταση της δύναμης από το σημείο, τη δύναμη και το σημείο, τον κανόνα του δεξιού χεριού

4.8) Με μικρή δύναμη μπορούμε να επιτύχουμε μεγάλη ροπή, ικανή να στρέψει το τιμόνι ενός μεγάλου οχήματος.

4.9) $\tau_{F_1} = \tau_{F_4} = 0$

$\tau_{F_1} = \tau_{F_4} < \tau_{F_3} < \tau_{F_2} < \tau_{F_5}$

4.10) α) Η δύναμη F_2 πρέπει να έχει ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη F_1, ώστε οι ροπές τους ως προς το σημείο Ο να είναι αντίθετες και η ράβδος να μη στρέφεται.

β) Εάν η F_1 απέχει από το Ο απόσταση d_1 και η F_2 απέχει απόσταση d_2 ισχύει:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $F_1 d_1 = F_2 d_2$

Επειδή $d_1 < d_2$, έχουμε: $F_1 > F_2$

4.11) δ: Η ράβδος παραμένει ακίνητη, άρα:

$\Sigma\tau_{(O)} = 0$ ή $F_1 \cdot \frac{2}{3}L = F_2 \cdot \frac{1}{3}L$ ή $F_2 = 2F_1$

Στροφορμή – διατήρηση της στροφορμής

4.23) δ

Ασκήσεις

Κινηματική του στερεού

4.32) $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{4\ \text{rad/s}}{16\ \text{s}}$ ή

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0{,}25\ \text{rad/s}^2$

Για $\omega = 20$ rad/s έχουμε: $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ ή

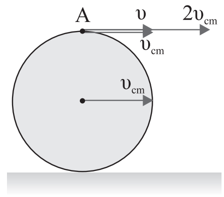
$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ ή $t = 72$ s

4.33) $\omega = \frac{\upsilon}{r}$ ή $\omega = \frac{20\ \text{m/s}}{0{,}4\ \text{m}}$ ή

$\omega = 50$ rad/s

4.34) $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{r} = 5\ \text{rad/s}^2$

4.35) α) Η ταχύτητα κάθε σημείου της περιφέρειας του δίσκου είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\upsilon_{cm} = \omega R$ λόγω μεταφορικής κίνησης και της ταχύτητας λόγω περιστροφής $\upsilon = \omega R$.



Άρα: $υ_A = υ_{cm} + υ = 2υ_{cm} = 10 \text{ m/s}$

β) $υ_{cm} = ωR$ ή $υ_{cm} = 2π f R$ ή $f = \dfrac{υ_{cm}}{2πR}$ ή

$f = 9{,}96 \text{ Hz}$

4.36) $υ = υ_0 - α_{cm} t$

Έστω ότι ο τροχός σταματά τη χρονική στιγμή t_1.

Επομένως: $υ_0 - α_{cm} t_1 = 0$ ή $t_1 = \dfrac{υ_0}{α_{cm}}$

$x = υ_0 t_1 - \dfrac{1}{2} α_{cm} t_1^2$ ή $x = \dfrac{υ_0^2}{α_{cm}} - \dfrac{υ_0^2}{2α_{cm}}$ ή

$x = \dfrac{υ_0^2}{2α_{cm}}$ ή $α_{cm} = \dfrac{υ_0^2}{2x}$ ή $α_{cm} = 1{,}6 \text{ m/s}^2$

$α_{γων} = \dfrac{α_{cm}}{R}$ ή $α_{γων} = 8 \text{ rad/s}^2$

Ροπή δύναμης

4.37) $τ_{max} = F_{max} \ell$ ή $τ_{max} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$

Για να είναι μέγιστη η ροπή θα πρέπει η δύναμη να ασκείται στο άκρο του κλειδιού, να βρίσκεται στο επίπεδο περιστροφής του κλειδιού και να είναι κάθετη στο κλειδί.

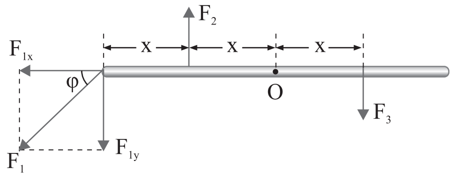
4.38) $τ_{ολ} = τ_{F_2} - τ_{F_1} = F_2 R - F_1 R$ ή

$τ_{ολ} = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$

Το διάνυσμα της ροπής έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του χαρτιού και φορά από το χαρτί προς τον αναγνώστη.

4.39) $τ_{1_{(O)}} = F_{1_y} \cdot 2x = F_1 ημ30^o \cdot 2x$ ή

$τ_{1_{(O)}} = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$



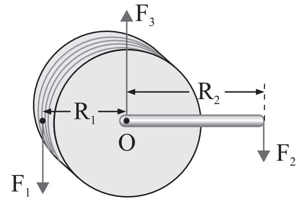
$τ_{2_{(O)}} = -F_2 \cdot x = -4 \text{ N} \cdot \text{m}$,

$τ_{3_{(O)}} = -F_3 \cdot x = -20 \text{ N} \cdot \text{m}$

$Στ_{(O)} = τ_{1_{(O)}} + τ_{2_{(O)}} + τ_{3_{(O)}}$ ή $Στ_{(O)} = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$

Ισορροπία στερεού σώματος

4.40) Η ελάχιστη δύναμη F_2 είναι εκείνη η ροπή της οποίας ως προς τον άξονα περιστροφής του βαρούλκου είναι αντίθετη από τη ροπή που ασκεί η δύναμη F_1.



Επομένως: $Στ_{(O)} = 0$ ή $F_1 R_1 - F_2 R_2 = 0$ ή

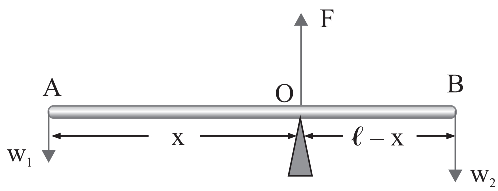
$F_2 = \dfrac{F_1 R_1}{R_2}$ ή $F_2 = 60 \text{ N}$

4.41) Η ράβδος ισορροπεί όταν $ΣF = 0$ και $Στ = 0$. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη $Στ = 0$ ως προς το σημείο O:

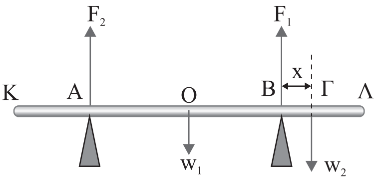
$Στ_{(O)} = 0$ ή $w_1 x - w_2 (\ell - x) = 0$ ή

$w_1 x - w_2 \ell + w_2 x = 0$ ή $x = \dfrac{w_2 \ell}{w_1 + w_2}$ ή

$x = 1{,}2 \text{ m}$



4.42) Έστω ότι όταν ο ελαιοχρωματιστής βρίσκεται στο σημείο Γ που απέχει απόσταση x από το σημείο Β της δοκού, η δοκός ισορροπεί οριακά, δηλαδή χάνει την επαφή της με το στήριγμα στο σημείο Α, οπότε $F_2 = 0$.



Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma\tau = 0$ ως προς το σημείο Β, έχουμε:

$\Sigma\tau_{(B)} = 0$ ή $-w_2 B\Gamma + w_1 OB = 0$ (1)

Θεωρώντας ότι η δοκός είναι ομογενής έχουμε: $OB = \frac{\ell}{2} - 1\,m$ ή $OB = 1\,m$

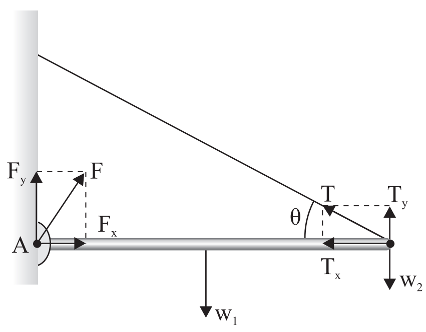
Από τη σχέση (1) έχουμε: $w_2 x = w_1 OB$ ή

$x = \frac{w_1 OB}{w_2}$ ή $x = 21\,cm$

Επομένως: $\Gamma\Lambda = B\Lambda - x$ ή $\Gamma\Lambda = 79\,cm$

Δηλαδή, ο ελαιοχρωματιστής μπορεί να σταθεί σε απόσταση 79 cm από το άκρο Λ (ή – λόγω συμμετρίας – από το άκρο Κ).

4.43) Εφόσον η δοκός ισορροπεί, ισχύουν $\Sigma F = 0$ και $\Sigma\tau = 0$.



$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T_x$ ή $F_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu 30^o$ (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y + T_y = w_1 + w_2$ ή

$F_y = w_1 + w_2 - T\eta\mu 30^o$ (2)

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma\tau = 0$ ως προς το σημείο Α, έχουμε:

$\Sigma\tau_{(A)} = 0$ ή $T_y \ell - w_1 \frac{\ell}{2} - w_2 \ell = 0$ ή

$T\eta\mu 30^o \ell = w_1 \frac{\ell}{2} + w_2 \ell$ ή $T = \dfrac{w_1 \frac{\ell}{2} + w_2 \ell}{\eta\mu 30^o \ell}$

ή $T = 180\,N$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν:

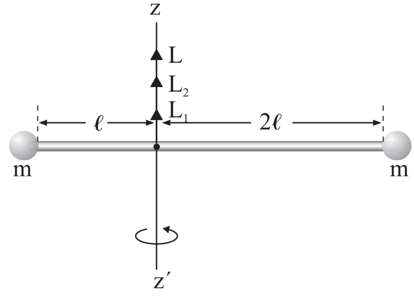
$F_x = 90\sqrt{3}\,N$ και $F_y = 50\,N$

Επομένως: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 163{,}7\,N$ και

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = 0{,}32$

Στροφορμή – Αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.47) Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα zz′ είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των δύο σφαιρών ως προς τον ίδιο άξονα.



$L = L_1 + L_2$ ή

$L = m\omega\ell^2 + m\omega(2\ell)^2 = 5m\omega\ell^2 = 5{,}12\,kg \cdot m^2/s$

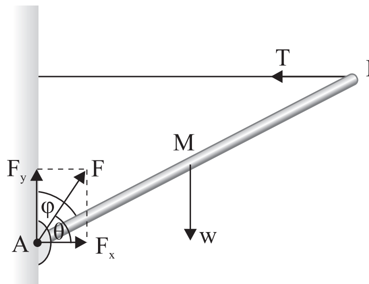
Προβλήματα

4.56) Η δοκός ισορροπεί, άρα ισχύουν:

$\Sigma F = 0$ και $\Sigma\tau = 0$

$\Sigma F_x = 0$ ή $F_x = T$

$\Sigma F_y = 0$ ή $F_y = w = 100$ N



Εφαρμόζουμε τη συνθήκη $\Sigma\tau = 0$ ως προς το Α:

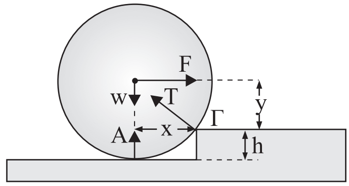
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } w\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - T\ell\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \text{ ή}$$

$$T = \frac{w\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi}{\ell\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή } T = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$F_x = T = 50\sqrt{3}$ N, άρα:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 50\sqrt{7} \text{ N, } \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.57) Για να υπερπηδήσει ο τροχός το εμπόδιο, πρέπει η ροπή της δύναμης F κατά απόλυτη τιμή να είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του βάρους του τροχού w κατά απόλυτη τιμή ως προς το ίδιο σημείο. (Όταν ο τροχός υπερπηδά το εμπόδιο, χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο και η αντίδραση Α μηδενίζεται). Αν στην αρχική θέση ισχύει: $|\tau_F| > |\tau_w|$ ως προς το σημείο Γ, αυτό θα ισχύει συνεχώς, επειδή όσο ο τροχός ανεβαίνει αυξάνεται η απόσταση y και μειώνεται η απόσταση x.



Επομένως:

$|\tau_F| > |\tau_w|$ ή $Fy > wx$ (1)

$y = R - h$ (2) και $x^2 + y^2 = R^2$ ή

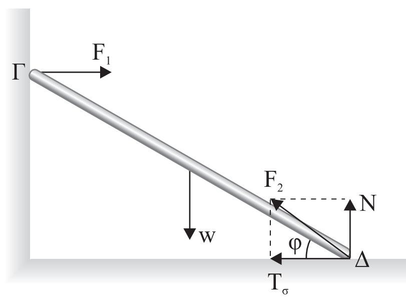
$x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$ ή

$x = \sqrt{2hR - h^2}$ ή $x = \sqrt{h(2R-h)}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3), έχουμε:

$$F(R-h) > w\sqrt{h(2R-h)} \text{ ή } F > \frac{w\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

4.58) Στη σκάλα ασκούνται το βάρος της w, η κάθετη δύναμη F_1 από τον τοίχο και η δύναμη F_2 από το οριζόντιο επίπεδο που αναλύεται στις δυνάμεις N και T_σ (στατική τριβή).



Εφόσον η σκάλα ισορροπεί οριακά για $\varphi = 30^o$, ισχύουν οι σχέσεις $\Sigma F = 0$ και $\Sigma\tau = 0$. Επομένως: $\Sigma F_x = 0$ ή $F_1 = T_\sigma$

και $\Sigma F_y = 0$ ή $w = N$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $\Sigma\tau = 0$ ως προς το σημείο Γ, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \text{ ή } w\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + T_\sigma\ell\eta\mu\varphi - N\ell\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

ή $w\frac{\ell}{2}συν30^o + μ_s N\ell ημ30^o - N\ell συν30^o = 0$

ή $w\frac{\ell}{2}συν30^o + μ_s w\ell ημ30^o - w\ell συν30^o = 0$

ή $μ_s = \frac{w\frac{\ell}{2}συν30^o}{w\ell ημ30^o}$ ή $μ_s = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.64) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σφαιρίδιο Σ από τη θέση όπου $r_1 = 30$ cm έως τη θέση όπου $r_2 = 15$ cm, έχουμε:

$\frac{1}{2}mυ_2^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2 = W_F$ ή

$\frac{1}{2}mω_2^2 r_2^2 - \frac{1}{2}mω_1^2 r_1^2 = W_F$ (1)

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής, έχουμε:

$L_1 = L_2$ ή $mω_1 r_1^2 = mω_2 r_2^2$ ή $ω_2 = ω_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$W_F = \frac{1}{2}mω_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)^2 r_2^2 - \frac{1}{2}mω_1^2 r_1^2$ ή

$W_F = \frac{1}{2}mω_1^2\frac{r_1^4}{r_2^2} - \frac{1}{2}mω_1^2 r_1^2$ ή

$W_F = \frac{1}{2}mω_1^2 r_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)$ ή $W_F = 43{,}2$ J

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ερωτήσεις

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.1) β, γ, ε

1.2) $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$

Για $t = 0$ έχουμε $x = 0$, άρα: $\eta\mu\varphi = 0$

Επομένως: $\varphi = 0$ ή $\varphi = \pi$ rad

Για να επιλέξουμε ανάμεσα στις δύο αρχικές φάσεις, πρέπει να γνωρίζουμε και την κατεύθυνση προς την οποία κινείται το σώμα τη χρονική στιγμή μηδέν, δηλαδή το πρόσημο της ταχύτητας.

1.3) γ

1.4) α) Η ταχύτητα είναι μηδέν στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης $(x = +A,\ x = -A)$ και μέγιστη στη θέση ισορροπίας $(x = 0)$.

Η επιτάχυνση και η δύναμη είναι μηδέν στη θέση ισορροπίας $(x = 0)$ και μέγιστες κατά απόλυτη τιμή στις ακραίες θέσεις $(x = +A,\ x = -A)$.

β) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης για $K = U$, έχουμε:

$$E = K + U \ \text{ή}\ E = 2U \ \text{ή}\ \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx^2 \ \text{ή}$$

$$A^2 = 2x^2 \ \text{ή}\ x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} \ \text{ή}\ x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

1.5)

x	U	K
0	0	5 J
x_1	3 J	2 J
x_2	4 J	1 J
A	5 J	0

1.6) α) $\frac{T}{4}$, β) $\frac{T}{2}$, γ) $\frac{3T}{4}$

1.7) α) 1 , β) αρνητική, γ) 0

1.8) β

Φθίνουσα, ελεύθερη και εξαναγκασμένη ταλάντωση. Συντονισμός.

1.17) γ

1.18) γ

1.19) γ

1.21) γ, δ

1.22) β, γ

1.23) β

1.24) Έστω ότι τις χρονικές στιγμές κT και $(\kappa+1)T$, με $\kappa = 1, 2, ...$, το πλάτος και η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης έχουν τιμές A_κ, $A_{\kappa+1}$ και E_κ, $E_{\kappa+1}$ αντίστοιχα.

α) $$\frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda\kappa T}}{A_0 e^{-\Lambda(\kappa+1)T}} = \frac{e^{-\Lambda\kappa T}}{e^{-\Lambda\kappa T}\cdot e^{-\Lambda T}} = e^{\Lambda T},$$

άρα: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = ... = e^{\Lambda T}$$

β) $$\frac{E_\kappa}{E_{\kappa+1}} = \frac{\frac{1}{2}DA_\kappa^2}{\frac{1}{2}DA_{\kappa+1}^2} = \left(\frac{A_\kappa}{A_{\kappa+1}}\right)^2 = e^{2\Lambda T},\ \text{άρα:}$$

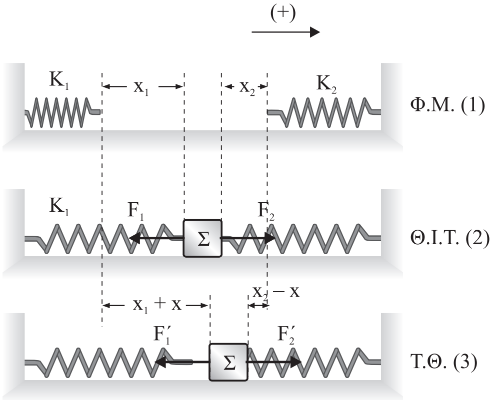
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \frac{E_3}{E_4} = ... = e^{2\Lambda T}$$

Ασκήσεις

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.27) Στη θέση ισορροπίας ταλάντωσης (θέση 2) το ελατήριο σταθεράς k_1 έχει επιμηκυνθεί κατά x_1 και το ελατήριο σταθεράς k_2 έχει επιμηκυνθεί κατά x_2.

$\Sigma F = 0$ ή $F_1 = F_2$ ή $k_2x_2 - k_1x_1 = 0$ (1)



Σε μία τυχαία θέση (θέση 3) που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, έχουμε:

$\Sigma F = F_2' - F_1'$ ή $\Sigma F = k_2(x_2 - x) - k_1(x_1 + x)$ ή

$\Sigma F = k_2x_2 - k_2x - k_1x_1 - k_1x$ ή

$\Sigma F = -(k_1 + k_2)x$ (2)

Η σχέση (2) είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$ με $D = k_1 + k_2$.

Επομένως το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \text{ ή } T = 0{,}2\pi \text{ s}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν θεωρούσαμε ότι στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια ήταν συσπειρωμένα ή βρίσκονταν στο φυσικό τους μήκος.

1.28) α) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση έχουμε:

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 \text{ ή } D = \frac{mu_1^2}{A^2 - x_1^2} \text{ ή}$$

$D = 200$ N/m

β) $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$ ή $u_2^2 = \dfrac{DA^2 - Dx_2^2}{m}$

ή $u_2 = \sqrt{\dfrac{D(A^2 - x^2)}{m}}$ ή $u_2 = 3$ m/s

1.29) Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$\Sigma F = 0$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = w$ ή $k \cdot \Delta\ell = mg$ ή

$k = \dfrac{mg}{\Delta\ell}$ (1)

Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\Delta\ell}}} \text{ ή } T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}} \text{ ή } T = 0{,}314 \text{ s}$$

Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Συντονισμός.

1.32) $A_1 = A_0e^{-\Lambda t_1}$ ή $e^{-\Lambda t_1} = \dfrac{A_1}{A_0}$ ή

$-\Lambda t_1 = \ell n\dfrac{A_1}{A_0}$ ή $\Lambda = -\dfrac{1}{t_1}\ell n\dfrac{1}{2}$ ή

$-\Lambda t_1 = \ell n\dfrac{1}{2}$ ή $-5\Lambda t_1 = \ell n\dfrac{1}{32}$ (1)

$A = A_0e^{-\Lambda t}$ ή $e^{-\Lambda t} = \dfrac{A}{A_0}$ ή $-\Lambda t = \ell n\dfrac{A}{A_0}$ ή

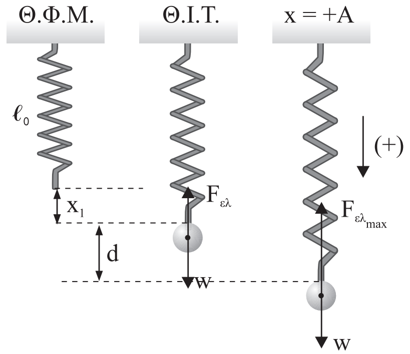
$-\Lambda t = \ell n\dfrac{1}{32}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε t = 50s.

Προβλήματα

1.38) α) Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ή $f = \dfrac{5}{\pi}$ Hz



β) Θεωρούμε θετική την κατεύθυνση προς τα κάτω.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$A = d = 5$ cm

$x = Aημ(ωt + φ_0)$

Για $t = 0$: $x = A$ ή $Aημφ_0 = A$ ή $ημφ_0 = 1$ ή

$φ_0 = \frac{π}{2}$ rad

γ) $υ_{max} = ωA$ ή $υ_{max} = 2πfA$ ή

$υ_{max} = 0{,}5$ m/s

δ) $α_{max} = ω^2A$ ή $α_{max} = 4π^2f^2A$ ή

$α_{max} = 5$ m/s^2

ε) Στη Θ.Ι.Τ. ισχύει: $F_{ελ} = w$ ή $kx_1 = mg$ ή

$x_1 = \frac{mg}{k}$ ή $x_1 = 0{,}1$ m

Το σώμα δέχεται τη μέγιστη δύναμη από το ελατήριο όταν βρίσκεται στη θέση $x = +A$.

$F_{ελ_{max}} = k(x_1 + d)$ ή $F_{ελ_{max}} = 15$ N

1.39) $ω = \frac{2π}{T}$ ή $ω = \frac{π}{5}$ rad/s , $φ_0 = 0$

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι:

$x = Aημωt$ ή $x = 0{,}2ημ\frac{πt}{5}$

Για $x = 0{,}1$m έχουμε: $0{,}1 = 0{,}2ημ\frac{πt}{5}$ ή

$ημ\frac{πt}{5} = \frac{1}{2}$ ή $ημ\frac{πt}{5} = ημ\frac{π}{6}$ ή $\frac{πt}{5} = 2κπ \pm \frac{π}{6}$

Από τη σχέση $\frac{πt}{5} = 2κπ + \frac{π}{6}$ για $κ = 0$ έχουμε: $t_1 = \frac{5}{6}$ s

Από τη σχέση $\frac{πt}{5} = 2κπ - \frac{π}{6}$ για $κ = 1$ έχουμε:

$t_2 = \frac{25}{6}$ s

Άρα: $Δt = t_2 - t_1$ ή $Δt = \frac{10}{3}$ s

1.40) α) Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς k.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση:

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mυ^2$ ή $A = υ\sqrt{\frac{M}{k}}$ ή $A = 0{,}1$ m

Το χρονικό διάστημα μεταξύ της πρόσκρουσης και του μηδενισμού της ταχύτητας είναι:

$Δt = \frac{T}{4}$ ή $Δt = \frac{π}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$ ή $Δt = \frac{π}{100}$ s

β) Ο επιβάτης κάνει ταλάντωση με ίδια περίοδο με το σύστημα και σταθερά επαναφοράς D.

$T_{επ} = T_{συστ}$ ή $2π\sqrt{\frac{m}{D}} = 2π\sqrt{\frac{M}{k}}$ ή $D = \frac{mk}{M}$ ή

$D = 15 \cdot 10^4$ N/m

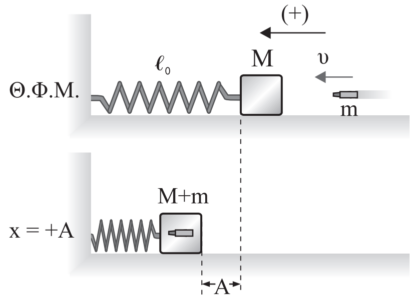
Η δύναμη που δέχεται ο επιβάτης από τη ζώνη πρόσδεσης παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς και είναι μέγιστη όταν $x = A$.

Επομένως: $F_{max} = DA$ ή $F_{max} = 15 \cdot 10^3$ N

1.41) α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$mυ = (m + M)υ_σ$ ή $υ_σ = \frac{m}{m+M}υ$ ή

$υ_σ = 5$ m/s



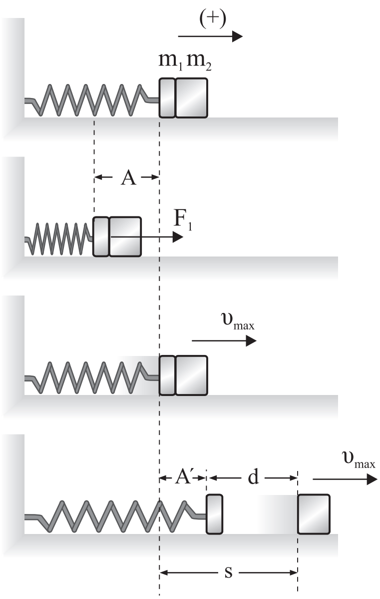
β) Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση $x = +A$. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε:

$\frac{1}{2}(m+M)\upsilon_\sigma^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = \sqrt{\frac{m+M}{k}}\upsilon_\sigma$ ή

$A = 0{,}1\ m$

γ) $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m+M}{k}}$ ή $\Delta t = 3{,}14 \cdot 10^{-2}\ s$

1.46) α) Όσο το σώμα Σ_2 βρίσκεται σε επαφή με το Σ_1, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A.



Τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς για το σώμα Σ_2 παίζει η δύναμη F που δέχεται από το σώμα Σ_1 και η οποία μηδενίζεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και η επαφή ανάμεσα στα δύο σώματα χάνεται.

β) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ ή $\omega = 5\ rad/s$

$\upsilon_{max} = \omega A$ ή $\upsilon_{max} = 2\ m/s$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για το σώμα Σ_1, έχουμε:

$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{max}^2$ ή $A' = \sqrt{\frac{m_1}{k}}\upsilon_{max}$ ή

$A' = 0{,}2\ m$

γ) Η περίοδος T' της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά τον αποχωρισμό των δύο σωμάτων είναι: $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή $T' = \frac{\pi}{5}\ s$

Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά τον αποχωρισμό των δύο σωμάτων σε χρόνο: $\Delta t = \frac{T'}{4}$ ή $\Delta t = \frac{\pi}{20}\ s$

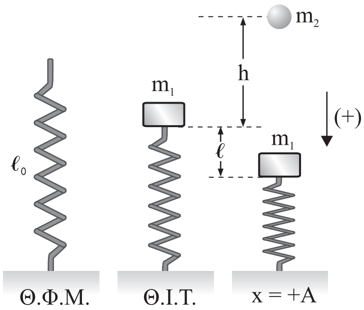
Σε αυτόν τον χρόνο το σώμα Σ_2 έχει διανύσει απόσταση: $s = \upsilon_{max}\Delta t$ ή $s = 0{,}314\ m$

Η απόσταση των δύο σωμάτων είναι:

$d = s - A'$ ή $d = 0{,}114\ m$

1.47) α) Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{5}\ s$.

Το σώμα Σ_1 φτάνει στη θέση ισορροπίας σε χρόνο: $\Delta t = \frac{T}{4}$ ή $\Delta t = \frac{\pi}{20}\ s$



Στον ίδιο χρόνο το σώμα Σ_2 πρέπει να διανύσει απόσταση h:

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \text{ ή } h = 0{,}125 \text{ m}$$

β) Οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από τη σύγκρουση είναι:

$$\upsilon_1 = \omega A = \frac{2\pi}{T}\ell = 2 \text{ m/s (μέτρο) και } \upsilon_2 = g\,\Delta t$$

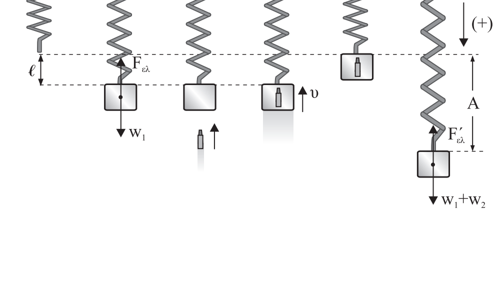
$$\text{ή } \upsilon_2 = 1{,}57 \text{ m/s (μέτρο)}$$

γ) Εφόσον τα σώματα μετά τη σύγκρουση μεταξύ τους αποκτούν ταχύτητες αντίθετες από αυτές που είχαν πριν από τη σύγκρουση, θα επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις και το φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται συνεχώς με περίοδο: $T' = \frac{T}{2}$ ή $T' = 0{,}314$ s

1.48) α) Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} = w_1 \text{ ή } k\ell = m_1 g \text{ ή } k = \frac{m_1 g}{\ell} \text{ ή}$$

$$k = 12 \text{ N/m}$$



Μετά τη σύγκρουση των δύο σωμάτων το συσσωμάτωμα κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα υ_σ. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:

$$\frac{1}{2}k\ell^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\sigma^2 = (m_1+m_2)g\ell \text{ ή}$$

$$\upsilon_\sigma = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)g\ell - k\ell^2}{m_1+m_2}} \text{ ή } \upsilon_\sigma = 2 \text{ m/s}$$

β) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 + w_2 \text{ ή } kA = (m_1+m_2)g$$

$$\text{ή } A = \frac{(m_1+m_2)g}{k} \text{ ή } A = 0{,}625 \text{ m}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} \text{ ή } T = 0{,}5\pi \text{ s}$$

$$\upsilon_{max} = \omega A \text{ ή } \upsilon_{max} = \frac{2\pi}{T}A \text{ ή } \upsilon_{max} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

γ) Η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\Delta t = \frac{T}{4} \text{ ή } \Delta t \simeq 0{,}4 \text{ s}$$