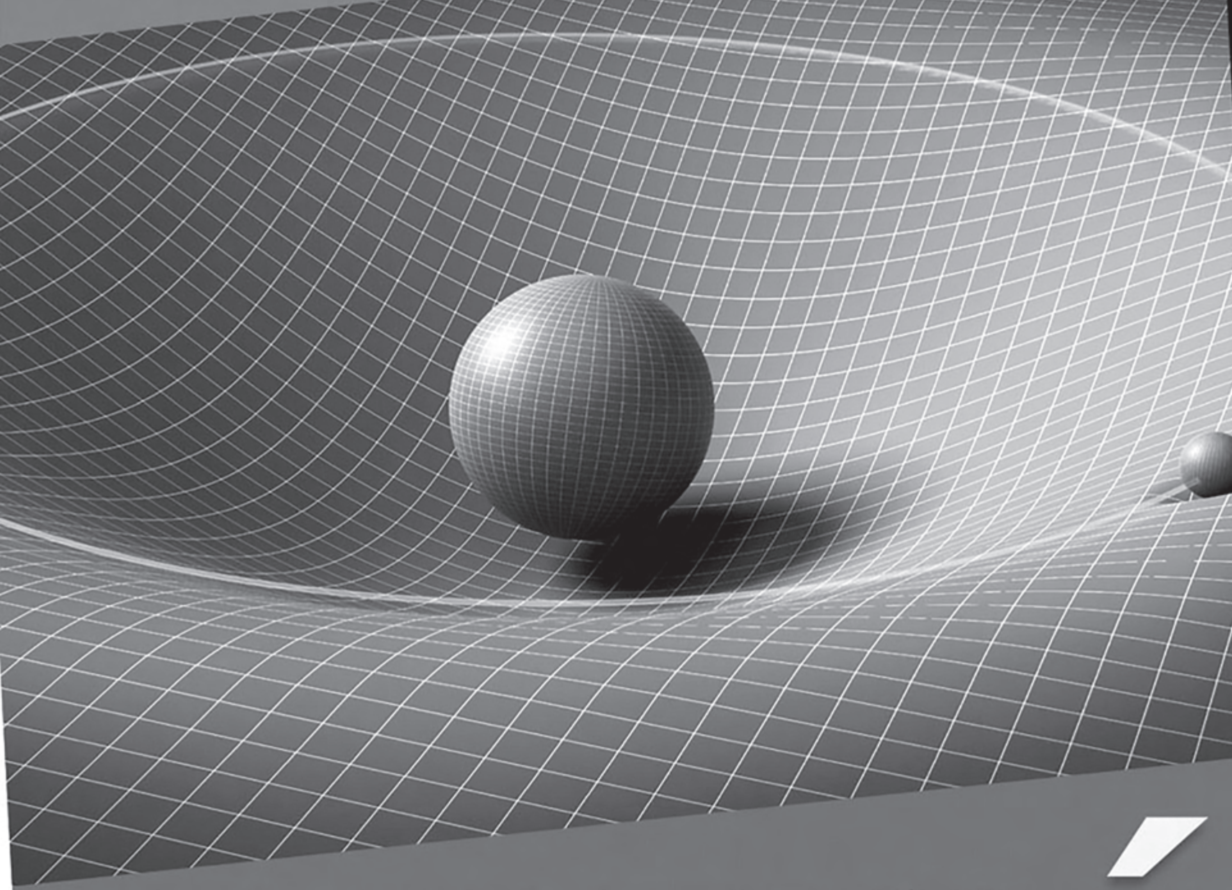
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ



φυσική

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

συμπλήρωμα του β΄ τόμου

ΠΕΡΙΕΧΕΙ:
20ό ΚΕΦΑΛΑΙΟ: **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**
21ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: **ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Περιεχομενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20ό

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΘΕΩΡΙΑ

20.1) Τι γνωρίζετε για τη βαρυτική έλξη;

Έστω δύο σώματα με πολύ μικρές διαστάσεις (σημειακές μάζες) που έχουν μάζες m_1 και m_2 και βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον **νόμο της παγκόσμιας έλξης**, που διατύπωσε ο Νεύτωνας, οι δύο αυτές σημειακές μάζες έλκονται με δύναμη που έχει μέτρο $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$.

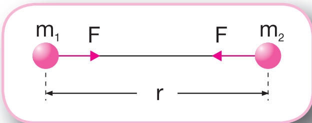
Η ελκτική δύναμη είναι **διατηρητική** και **κεντρική**.

Στον νόμο της παγκόσμιας έλξης το G είναι μία σταθερά, γνωστή ως **σταθερά της παγκόσμιας έλξης**. Οπουδήποτε στο Σύμπαν η τιμή της σταθεράς G είναι: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$


Ο Cavendish με τη βοήθεια ενός ζυγού στρέψης υπολόγισε τη σταθερά G.

Η σταθερά G είναι ανεξάρτητη από τη μάζα των σωμάτων και από το υλικό που τα περιβάλλει.

Η σχέση $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ δίνει και τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο **ομογενών σφαιρικών μαζών**, οπότε r είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους και οι ελκτικές δυνάμεις έχουν σημεία εφαρμογής τα κέντρα των δύο σφαιρών.



Οι βαρυτικές δυνάμεις:
- Έχουν μεταξύ τους σχέση δράσης - αντίδρασης.
- Υπάρχουν ανεξάρτητα από το σχήμα ή το μέγεθος των σωμάτων ή την απόσταση μεταξύ τους.
- Είναι ανεξάρτητες από το υλικό που υπάρχει μεταξύ των σωμάτων.
- Παρότι ελαττώνονται με την απόσταση, ποτέ δε γίνονται ακριβώς μηδέν. Επομένως, κάθε σωματίδιο στο Σύμπαν έλκει όλα τα άλλα σωματίδια, έστω και ανεπαίσθητα, ακόμη και όταν η απόστασή του από αυτά είναι πολύ μεγάλη.

20.2) Τι είναι το βαρυτικό πεδίο;

Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών είναι δύναμη από απόσταση και επομένως μπορεί να περιγραφεί με την έννοια του πεδίου.

Κάθε μάζα δημιουργεί γύρω της πεδίο, που ονομάζεται **πεδίο βαρύτητας** ή **βαρυτικό πεδίο**. Εάν κάποια άλλη μάζα βρεθεί μέσα σε αυτό το πεδίο, θα δεχτεί δύναμη από αυτό.

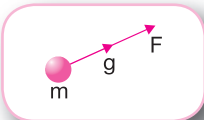
Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται εκείνος ο χώρος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη.

Για την περιγραφή του βαρυτικού πεδίου χρησιμοποιούμε τα μεγέθη **ένταση** και **δυναμικό**.

20.3) Τι γνωρίζετε για την ένταση του βαρυτικού πεδίου;

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο.

Ένταση (g) του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της δύναμης (F) που θα δεχτεί μία μάζα (m), εάν βρεθεί σε αυτό το σημείο, προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $g = \frac{F}{m}$



Η ένταση g έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη F.
Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων η μονάδα μέτρησης της έντασης είναι το $1\,N/kg$ ή το $1\,m/s^2$.
Όπως προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα μάζας m, εάν αφεθεί ελεύθερο στο πεδίο βαρύτητας, είναι $\alpha = \frac{F}{m}$. Από τον ορισμό της έντασης προκύπτει: $g = \alpha$

Επομένως:

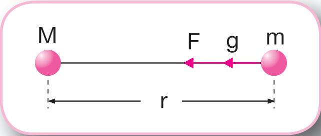
> Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του ταυτίζεται με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, εάν αφεθεί ελεύθερο σε εκείνο το σημείο.

20.4) Να υπολογίσετε την ένταση σε ένα σημείο ενός βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από σημειακή μάζα.

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από σημειακή μάζα M. Εάν σε ένα σημείο A του πεδίου που απέχει απόσταση r από τη μάζα M τοποθετήσουμε μία σημειακή μάζα m, αυτή θα δεχτεί δύναμη το μέτρο της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η ένταση του πεδίου στο σημείο A δίνεται από τη σχέση: $g = \frac{F}{m} \quad (2)$



Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\boxed{g = G\frac{M}{r^2}}$

20.5) Πώς ορίζεται το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας;

Επειδή το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του το δυναμικό.

> Δυναμικό (V) του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του A ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο A στο άπειρο, προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$

Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων η μονάδα μέτρησης του δυναμικού είναι το $1J/kg$.
Ειδικά για το πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M, το δυναμικό σε ένα σημείο του A που απέχει απόσταση r από τη μάζα M δίνεται επίσης από τη σχέση: $\boxed{V_A = -G\frac{M}{r}}$

20.6) Τι είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του πεδίου βαρύτητας;

Έστω δύο σημεία A και B ενός βαρυτικού πεδίου.

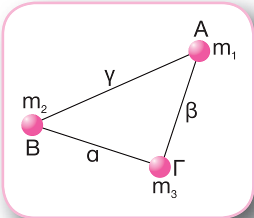
Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Β του πεδίου βαρύτητας ονομάζεται το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας μάζας m από το σημείο Α έως το σημείο Β προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή: $V_A - V_B = \frac{W_{A\to B}}{m}$

20.7) Τι γνωρίζετε για τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος σημειακών μαζών;

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών m_1 και m_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν οι δύο μάζες από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν στις θέσεις τους. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι, για να κάνουμε άπειρη την απόσταση δύο μαζών που αρχικά βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους, πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα.

Αποδεικνύεται ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος τριών σημειακών μαζών m_1, m_2 και m_3 που βρίσκονται στις θέσεις Α, Β και Γ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα, υπολογίζεται από τη σχέση: $U = -G\frac{m_1 m_2}{\gamma} - G\frac{m_1 m_3}{\beta} - G\frac{m_2 m_3}{\alpha}$

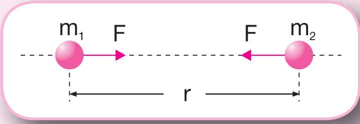


Η δυνατότητα να προσθέτουμε τους όρους δυναμικής ενέργειας για όλα τα ενδεχόμενα ζεύγη σωμάτων προκύπτει από το πειραματικό γεγονός ότι οι βαρυτικές δυνάμεις υπακούουν στην αρχή της υπέρθεσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

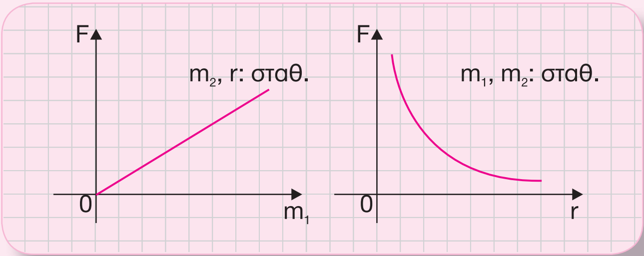
➢ Δυνάμεις παγκόσμιας έλξης

Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους αλληλεπιδρούν με βαρυτικές δυνάμεις το μέτρο των οποίων δίνεται από τη σχέση: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$



Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ δύο μαζών είναι πάντοτε ελκτικές.
Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G είναι ανεξάρτητη των μαζών και του υλικού που τις περιβάλλει και οπουδήποτε στο Σύμπαν έχει σταθερή τιμή $G = 6,673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα για τη δράση - αντίδραση, οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σημειακών μαζών έχουν αντίθετη φορά και ίσα μέτρα.

Όπως προκύπτει από τη σχέση $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, το μέτρο της βαρυτικής δύναμης μεταξύ δύο μαζών είναι ανάλογο των μαζών m_1 και m_2 και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r μεταξύ τους. Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται και στα παρακάτω διαγράμματα $F = f(m_1)$ και $F = f(r)$.



➢ Υπολογισμός απόστασης και μάζας

Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ μπορούμε να υπολογίσουμε:

- την απόσταση r μεταξύ των δύο μαζών:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ή \quad r^2 = G\frac{m_1 m_2}{F} \quad ή \quad r = \sqrt{G\frac{m_1 m_2}{F}}$$

- την τιμή της μίας μάζας, π.χ. της m_1:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ή \quad G m_1 m_2 = F r^2 \quad ή \quad m_1 = \frac{F r^2}{G m_2}$$

- **Μεταβολή της δύναμης παγκόσμιας έλξης**

  Όταν μεταβάλλονται είτε η απόσταση r μεταξύ των δύο σημειακών μαζών είτε οι τιμές των μαζών m_1 και m_2 είτε και τα δύο ταυτόχρονα, μεταβάλλεται το μέτρο της ελκτικής δύναμης μεταξύ τους. Το μέτρο F' της ελκτικής δύναμης στην τελική κατάσταση μπορούμε να το εκφράσουμε σε σχέση με το μέτρο F της ελκτικής δύναμης στην αρχική κατάσταση όπου οι δύο σημειακές μάζες απέχουν απόσταση r, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

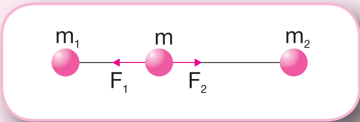
Παράδειγμα

Έστω ότι διπλασιάζεται η τιμή της μάζας m_1 και ταυτόχρονα τριπλασιάζεται η απόσταση r μεταξύ των δύο μαζών. Δηλαδή, $m_1' = 2m_1$ και $r' = 3r$. Εφαρμόζοντας τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, έχουμε:

$$F' = G\frac{m_1' m_2}{r'^2} \quad \text{ή} \quad F' = G\frac{2m_1 m_2}{9r^2} \quad \text{ή} \quad F' = \frac{2}{9}G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{ή} \quad F' = \frac{2}{9}F$$

- **Ισορροπία μάζας**

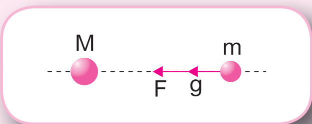
  Για να ισορροπεί μία σημειακή μάζα m που βρίσκεται σε χώρο όπου υπάρχουν δύο άλλες σημειακές μάζες m_1 και m_2, πρέπει η συνισταμένη ελκτική δύναμη που δέχεται από τις δύο μάζες να είναι μηδέν. Επομένως, η μάζα m πρέπει να τοποθετηθεί μεταξύ των δύο μαζών m_1 και m_2 και επάνω στην ευθεία που τις ενώνει, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- **Ένταση βαρυτικού πεδίου**

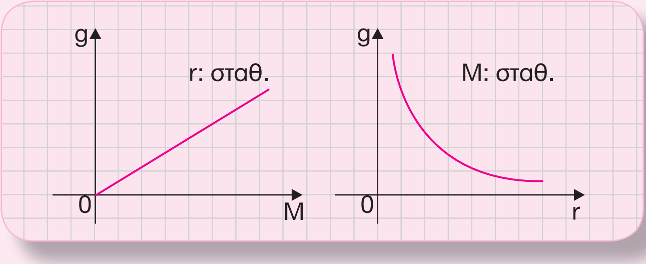
  Η ένταση g ενός βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο δίνεται από τη σχέση $g = \frac{F}{m}$, όπου F είναι η δύναμη που θα δεχτεί μία μάζα m, εάν βρεθεί σε αυτό το σημείο. Η σχέση αυτή είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο. Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M ισχύει επίσης η σχέση $g = G\frac{M}{r^2}$.

  Η ένταση σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου είναι πάντα ομόρροπη της δύναμης, υπάρχει ανεξάρτητα από το εάν τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο δοκιμαστική σημειακή μάζα και είναι ανεξάρτητη από την τιμή της μάζας αυτής.



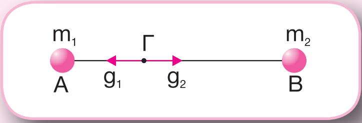
- **Σχέση έντασης-μάζας και έντασης-απόστασης στο βαρυτικό πεδίο**

  Όπως προκύπτει από τη σχέση $g = G\frac{M}{r^2}$, το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου είναι ανάλογο της μάζας M που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r από αυτό. Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται και στα παρακάτω διαγράμματα $g = f(M)$ και $g = f(r)$.



- **Σημεία βαρυτικού πεδίου με μηδενική ένταση**

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου μηδενίζεται σε ένα σημείο Γ του πεδίου το οποίο βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



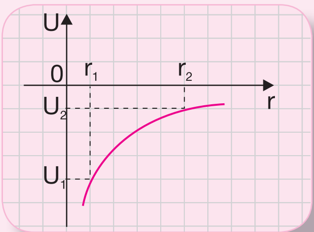
- **Κίνηση μάζας μέσα σε βαρυτικό πεδίο**

Έστω ότι σε ένα βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από μία σημειακή μάζα Μ αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί ένα σωματίδιο μάζας m. Η μοναδική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι η δύναμη από το βαρυτικό πεδίο.

- Το σωματίδιο θα αρχίσει να κινείται με επιτάχυνση το μέτρο της οποίας δίνεται από τη σχέση: $\alpha = \frac{F}{m}$ ή $\alpha = G\frac{M}{r^2}$
- Η κίνηση του σωματιδίου είναι επιταχυνόμενη.
- Για την κίνηση του σωματιδίου **δεν ισχύουν** οι σχέσεις $\upsilon = \alpha t$ και $x = \frac{1}{2}\alpha t^2$, επειδή η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή.

- **Βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών**

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$. Όπως προκύπτει από αυτή τη σχέση, η δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται με την απόσταση (αυξάνεται από μεγάλες αρνητικές τιμές προς το μηδέν). Τα συμπεράσματα αυτά αποτυπώνονται στο διάγραμμα $U = f(r)$.



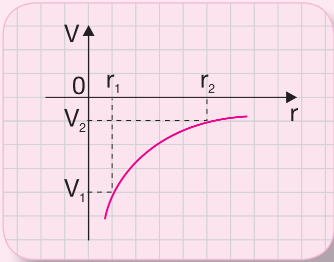
Εάν η μία μάζα είναι πολύ μεγάλη και δεν κινείται, τότε θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι η δυναμική ενέργεια της άλλης μάζας.

- **Δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου**

Έστω ένα βαρυτικό πεδίο και μία σημειακή μάζα m που βρίσκεται στο σημείο Α του πεδίου.

Το δυναμικό στο σημείο Α δίνεται από τη σχέση $V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{m}$, όπου $W_{A\to\infty}$ είναι το έργο της δύναμης του πεδίου προκειμένου η μάζα m να μεταφερθεί από το σημείο Α στο άπειρο. Η σχέση αυτή είναι γενική και ισχύει για οποιοδήποτε είδος βαρυτικού πεδίου.

Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα Μ ισχύει η σχέση $V_A = -G\frac{M}{r}$, όπου r η απόσταση του σημείου Α από τη μάζα Μ.



Το δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου ορίζεται **ανεξάρτητα** από το εάν θα τοποθετήσουμε ή όχι σε αυτό το σημείο δοκιμαστική μάζα m.

Το δυναμικό είναι **μονόμετρο μέγεθος** και επομένως για τον υπολογισμό του αρκεί να προσδιορίσουμε μόνο την αλγεβρική του τιμή.

- **Δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από πολλές μάζες**

Έστω ένα πεδίο που οφείλεται σε δύο ή περισσότερες σημειακές μάζες. Για να βρούμε το δυναμικό σε ένα σημείο Α του πεδίου, υπολογίζουμε το δυναμικό που προκαλεί στο σημείο Α κάθε σημειακή μάζα και στη συνέχεια προσθέτουμε αλγεβρικά τα δυναμικά αυτά. Δηλαδή:

$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + \ldots + V_{A_\nu}$

- **Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ενός βαρυτικού πεδίου**

Έστω σημειακή μάζα Μ που δημιουργεί βαρυτικό πεδίο και δοκιμαστική σημειακή μάζα m που μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β του πεδίου.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β δίνεται από τη σχέση $V_{AB} = \frac{W_{A\to B}}{m}$, που είναι γενική και ισχύει για όλα τα είδη των βαρυτικών πεδίων.

Ειδικά για το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται από μία μάζα Μ ισχύει η σχέση $V_{AB} = V_A - V_B = -G\frac{M}{r_A} - \left(-G\frac{M}{r_B}\right) = -GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$, όπου r_A και r_B είναι οι αποστάσεις των σημείων Α και Β αντίστοιχα από τη μάζα Μ.

➢ **Έργο δύναμης κατά τη μετακίνηση μάζας σε βαρυτικό πεδίο**

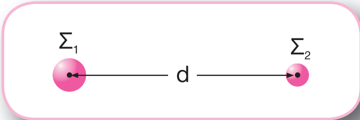
Έστω μία σημειακή μάζα m που μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β ενός βαρυτικού πεδίου, χωρίς να μεταβληθεί η κινητική της ενέργεια. Επειδή στις δύο θέσεις Α και Β η μάζα είναι ακίνητη, πρέπει στη μάζα, εκτός από τη δύναμη F_β του βαρυτικού πεδίου, να ασκείται και μία εξωτερική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$K_B - K_A = W_{\Sigma F} \text{ ή } 0 = W_{F_\beta}^{A\to B} + W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} \text{ ή } W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = -W_{F_\beta}^{A\to B} \text{ ή } W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = -m\left(V_A - V_B\right) \text{ ή}$$

$$W_{F_{\varepsilon\xi}}^{A\to B} = m\left(V_B - V_A\right)$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20.8) Δύο ομογενείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 64kg$ και $m_2 = 16kg$ αντίστοιχα συγκρατούνται σε τέτοια θέση ώστε τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση $d = 4m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τιμή της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης είναι $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.



α) Να βρείτε το μέτρο της βαρυτικής έλξης που δέχεται κάθε σφαίρα και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διανύσματα.

β) Να προσδιορίσετε το σημείο στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί μία τρίτη ομογενής σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 4kg$ ανάμεσα στις άλλες δύο με το κέντρο της στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα κέντρα των δύο σφαιρών, ώστε να ισορροπεί.

γ) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σφαίρα Σ_3, όταν τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα κέντρα των σφαιρών Σ_1 και Σ_2.

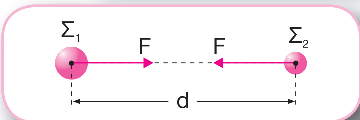
Λύση

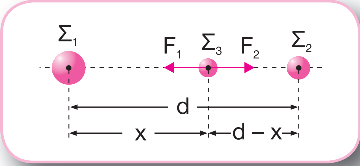
α) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των δύο σφαιρών είναι ελκτικές, έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσο μέτρο, που υπολογίζεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης:

Οι βαρυτικές δυνάμεις έχουν μεταξύ τους σχέση δράσης - αντίδρασης.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \text{ ή } F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{64 \cdot 16}{4^2} N \text{ ή}$$

$$F = 4{,}26 \cdot 10^{-9} N$$





β) Έστω ότι η σφαίρα Σ_3 ισορροπεί σε απόσταση x από τη σφαίρα Σ_1, οπότε η απόστασή της από τη σφαίρα Σ_2 είναι $d-x$. Εφόσον η σφαίρα Σ_3 ισορροπεί, οι δυνάμεις F_1 και F_2 που δέχεται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα είναι αντίθετες.

$$\Sigma\vec{F}=0 \quad \text{ή} \quad F_1=F_2 \quad \text{ή} \quad G\frac{m_1m_3}{x^2}=G\frac{m_2m_3}{(d-x)^2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{m_1}{x^2}=\frac{m_2}{(d-x)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{64}{x^2}=\frac{16}{(4-x)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{(4-x)^2}=\frac{64}{16} \quad \text{ή}$$

$$\frac{x}{4-x}=\pm\sqrt{4} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{4-x}=\pm 2$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πάντοτε ελκτικές.

Εάν $\frac{x}{4-x}=-2$ ή $x=-8+2x$, προκύπτει $x=8\text{m}$.

Αυτό σημαίνει ότι η σφαίρα Σ_3 πρέπει να τοποθετηθεί δεξιά από τη σφαίρα Σ_2. Τότε όμως, επειδή οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πάντοτε ελκτικές, οι δύο δυνάμεις που θα δέχεται από τις άλλες σφαίρες θα έχουν ίσα μέτρα και ίδια κατεύθυνση και επομένως η σφαίρα Σ_3 δε θα ισορροπεί.

Στο βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από δύο ομογενείς σφαίρες, το σημείο στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί μία τρίτη σφαίρα ώστε να ισορροπεί βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών.

Εάν $\frac{x}{4-x}=+2$ ή $x=8-2x$, προκύπτει $x=\frac{8}{3}\text{m}$.

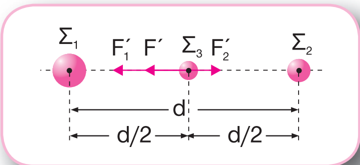
γ) Η δύναμη F_1' που δέχεται η σφαίρα Σ_3 από τη σφαίρα Σ_1 έχει μέτρο:

$$F_1'=G\frac{m_1m_3}{(d/2)^2} \quad \text{ή} \quad F_1'=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{64\cdot4}{2^2}\text{N} \quad \text{ή} \quad F_1'=4{,}26\cdot10^{-9}\text{N}$$

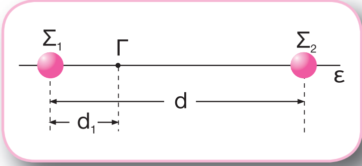
Η δύναμη F_2' που δέχεται η σφαίρα Σ_3 από τη σφαίρα Σ_2 έχει μέτρο:

$$F_2'=G\frac{m_2m_3}{(d/2)^2} \quad \text{ή} \quad F_2'=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{16\cdot4}{2^2}\text{N} \quad \text{ή} \quad F_2'=1{,}06\cdot10^{-9}\text{N}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων F_1' και F_2' έχει μέτρο $F'=F_1'-F_2'=3{,}2\cdot10^{-9}\text{N}$ και κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της δύναμης F_1', όπως φαίνεται στο σχήμα.



20.9) **Δύο μικρές σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 81m$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.**



α) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργούν οι δύο σφαίρες σε ένα σημείο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που απέχει απόσταση $d_1 = \dfrac{d}{5}$ από το σημείο Α και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Δ της ευθείας ε στο οποίο η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν.

γ) Να υπολογίσετε το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ.

Λύση

α) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η σφαίρα $Σ_1$ στο σημείο Γ είναι:

$$g_1 = G\frac{m_1}{d_1^2} \quad ή \quad g_1 = G\frac{m_1}{\left(\frac{d}{5}\right)^2} \quad ή \quad g_1 = 25G\frac{m}{d^2}$$

Σε κάθε σημείο ενός βαρυτικού πεδίου υπάρχουν τόσες εντάσεις όσα είναι τα σώματα που βρίσκονται στο βαρυτικό πεδίο. Η συνισταμένη ένταση σε ένα σημείο είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα όλων των εντάσεων στο σημείο αυτό.

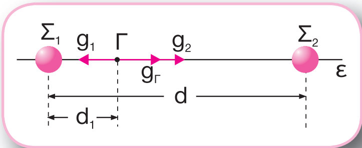
Η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η σφαίρα $Σ_2$ στο σημείο Γ είναι:

$$g_2 = G\frac{m_2}{d_2^2} \quad ή \quad g_2 = G\frac{81m}{\left(\frac{4}{5}d\right)^2} \quad ή \quad g_2 = 2.025G\frac{m}{16d^2}$$

Η συνισταμένη ένταση στο σημείο Γ είναι:

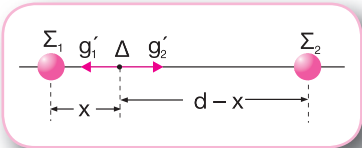
$$g_Γ = g_2 - g_1 \quad ή \quad g_Γ = 2.025G\frac{m}{16d^2} - 25G\frac{m}{d^2} \quad ή$$

$$g_Γ = 1.625G\frac{m}{16d^2}$$



Στο σχήμα φαίνεται η κατεύθυνση της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Γ.

β) Έστω ότι το σημείο Δ απέχει απόσταση x από το σημείο Α και απόσταση $d - x$ από το σημείο Β. Επομένως, έχουμε:



$$\vec{g}_Δ = 0 \quad ή \quad g_2' - g_1' = 0 \quad ή \quad G\frac{m_2}{(d-x)^2} = G\frac{m_1}{x^2} \quad ή$$

$$G\frac{81m}{(d-x)^2}=G\frac{m}{x^2} \quad ή \quad \frac{81}{(d-x)^2}=\frac{1}{x^2} \quad ή \quad \frac{9}{d-x}=\pm\frac{1}{x}$$

Επομένως: $9x=d-x$ ή $x=\frac{d}{10}$ και $9x=-d+x$ ή $8x=-d$ ή $x=-\frac{d}{8}$ (απορρίπτεται, επειδή το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ)

Στο βαρυτικό πεδίο που έχει δημιουργηθεί από δύο ομογενείς σφαίρες, το σημείο στο οποίο η συνισταμένη ένταση είναι μηδέν βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών.

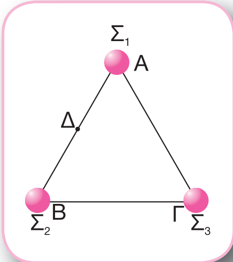
γ) Το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ είναι ίσο με το άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που δημιουργούν οι δύο σφαίρες. Επομένως:

$$V_\Delta=V_1+V_2 \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{m_1}{x}-G\frac{m_2}{d-x} \quad ή$$

$$V_\Delta=-10G\frac{m}{d}-10G\frac{81m}{9d} \quad ή \quad V_\Delta=-100G\frac{m}{d}$$

Το δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των δυναμικών που οφείλονται σε όλα τα σώματα που δημιουργούν το πεδίο.

20.10) Τρεις μικρές σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ με μάζες $m_1=m_2=m_3=m$ βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές Α, Β και Γ αντίστοιχα ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται: $\sqrt{3}=1,73$.



α) Να υπολογίσετε το συνολικό δυναμικό στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του βαρυτικού πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας σφαίρας $Σ_4$ μάζας $m_4=m$ από το σημείο Δ μέχρι το άπειρο.

γ) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ζ της πλευράς ΒΓ στο οποίο ισχύει η σχέση $V_{Z_2}=5V_{Z_3}$, όπου V_{Z_2} και V_{Z_3} είναι τα δυναμικά που οφείλονται στις σφαίρες $Σ_2$ και $Σ_3$ αντίστοιχα.

Λύση

α) Το συνολικό δυναμικό στο σημείο Δ είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών των πεδίων που δημιουργούν οι τρεις σφαίρες. Γνωρίζοντας ότι $ΑΔ=ΒΔ=\frac{α}{2}$ και $ΔΓ=\sqrt{α^2-\left(\frac{α}{2}\right)^2}=\frac{α\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$V_\Delta=V_1+V_2+V_3 \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{m_1}{ΑΔ}-G\frac{m_2}{ΒΔ}-G\frac{m_3}{ΓΔ} \quad ή \quad V_\Delta=-G\frac{2m}{α}-G\frac{2m}{α}-G\frac{2m}{α\sqrt{3}} \quad ή$$

$$V_\Delta\simeq-5,15\frac{Gm}{α}$$

β) Το έργο της δύναμης του βαρυτικού πεδίου κατά τη μετακίνηση της σφαίρας Σ_4 από το σημείο Δ μέχρι το άπειρο υπολογίζεται από τη σχέση:
$W_F^{\Delta\to\infty} = m_4\left(V_\Delta - V_\infty\right)$ ή $W_F^{\Delta\to\infty} = m_4 V_\Delta$ ή
$W_F^{\Delta\to\infty} \simeq -5{,}15\dfrac{Gm^2}{\alpha}$

Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση μίας μάζας μεταξύ δύο σημείων του πεδίου δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει η μάζα, αλλά από την αρχική και την τελική της θέση.

γ) Έστω ότι το σημείο Ζ απέχει απόσταση x από την κορυφή Β και απόσταση $\alpha - x$ από την κορυφή Γ.
$V_{Z_2} = 5V_{Z_3}$ ή $-G\dfrac{m_2}{x} = -5G\dfrac{m_2}{\alpha - x}$ ή $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{\alpha - x}$ ή $\alpha - x = 5x$ ή $x = \dfrac{\alpha}{6}$

20.11) **Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 4m_1$ συγκρατούνται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση ℓ μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αφήνουμε τις σφαίρες ελεύθερες να κινηθούν. Η μοναδική δύναμη που δέχονται οι δύο σφαίρες είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.**

α) Να βρείτε τη σχέση των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σφαιρών κάθε χρονική στιγμή.

β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες υ_1 και υ_2 των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή κατά την οποία η μεταξύ τους απόσταση είναι $\ell' = \dfrac{\ell}{4}$.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{F_1}{F_2}$ της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη στην αρχική θέση και στη θέση όπου η απόσταση μεταξύ τους είναι ℓ'.

Λύση

α) Επειδή οι σφαίρες δε δέχονται άλλες δυνάμεις εκτός από τη μεταξύ τους ελκτική δύναμη, το σύστημα είναι απομονωμένο και η ορμή του διατηρείται. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών, έχουμε:

Σε ένα σύστημα που είναι μονωμένο ισχύει κάθε χρονική στιγμή η αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος.

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2$ ή $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2$ ή $m_1\upsilon_1 = 4m_1\upsilon_2$ ή $\upsilon_1 = 4\upsilon_2$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σφαιρών μεταξύ της αρχικής τους θέσης και της θέσης όπου η μεταξύ τους απόσταση είναι $\ell' = \frac{\ell}{4}$:

> Σε ένα σύστημα όπου ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή δυνάμεις που δεν παράγουν έργο ισχύει κάθε χρονική στιγμή η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή}$$

$$-G\frac{m_1 m_2}{\ell} = -G\frac{m_1 m_2}{\ell'} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \quad \text{ή}$$

$$-G\frac{4m_1^2}{\ell} = -G\frac{4m_1^2}{\ell/4} + \frac{1}{2}m_1 \cdot 16\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 4m_1\upsilon_2^2 \quad \text{ή} \quad 12G\frac{m_1^2}{\ell} = 10m_1\upsilon_2^2 \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{6Gm_1}{5\ell} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{6Gm_1}{5\ell}}$$

Επομένως: $\upsilon_1 = 4\sqrt{\frac{6Gm_1}{5\ell}}$

γ) Όταν η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι ℓ, έχουμε:

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{\ell^2} \quad \text{ή} \quad F_1 = 4G\frac{m_1^2}{\ell^2}$$

Όταν η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι $\ell' = \frac{\ell}{4}$, έχουμε:

$$F_2 = G\frac{m_1 m_2}{(\ell/4)^2} \quad \text{ή} \quad F_2 = 64G\frac{m_1^2}{\ell^2}$$

Επομένως: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{4G\frac{m_1^2}{\ell^2}}{64G\frac{m_1^2}{\ell^2}}$ ή $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{16}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

20.12) Να διατυπώσετε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης.

20.13) Τι είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και ποια είναι η τιμή της;

20.14) Να σχολιάσετε την πρόταση: «Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του ταυτίζεται με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, εάν αφεθεί ελεύθερο σε εκείνο το σημείο».

20.15) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα στα οποία φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M σε συνάρτηση με τη μάζα M και σε συνάρτηση με την απόσταση από αυτή.

20.16) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από μία σημειακή μάζα M σε συνάρτηση με την απόσταση από αυτή.

20.17) Τι υποδηλώνει το αρνητικό πρόσημο στη σχέση που δίνει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών;

20.18) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος δύο σημειακών μαζών σε συνάρτηση με την απόσταση μεταξύ τους.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

20.19) Η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι:
α) ανάλογη με το άθροισμα των δύο μαζών.
β) ανάλογη με το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης.
γ) ανεξάρτητη από το υλικό που παρεμβάλλεται μεταξύ των δύο μαζών.

20.20) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι:
α) πάντοτε ελκτικές.
β) πάντοτε απωστικές.
γ) άλλοτε απωστικές και άλλοτε ελκτικές ανάλογα με τη θέση των δύο μαζών.

20.21) Οι βαρυτικές δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν δύο σώματα πολύ μικρών διαστάσεων:
α) είναι αντίθετες.
β) έχουν ίσα μέτρα και ίδιες κατευθύνσεις.
γ) έχουν ίσα μέτρα και κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

20.22) Εάν διπλασιάσουμε την απόσταση δύο σημειακών μαζών, το μέτρο της βαρυτικής δύναμης με την οποία αλληλεπιδρούν:

α) διπλασιάζεται.

β) υποδιπλασιάζεται.

γ) υποτετραπλασιάζεται.

20.23) Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης εκφράζεται με τη σχέση:

α) $F = G\frac{m_1 m_2}{r}$ β) $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ γ) $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$

20.24) Η τιμή της παγκόσμιας σταθεράς G:

α) εξαρτάται από το υλικό που παρεμβάλλεται μεταξύ των σωμάτων.

β) εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων.

γ) σε οποιοδήποτε σημείο του σύμπαντος είναι $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

20.25) Η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 υπολογίζεται από τη σχέση $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$:

α) ανεξάρτητα από το σχήμα και το μέγεθος των σωμάτων.

β) ανεξάρτητα από την απόσταση των δύο σωμάτων.

γ) μόνο αν πρόκειται για σημειακές μάζες ή ομογενή σφαιρικά σώματα.

20.26) Κεντρικές ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο σωμάτων και ο φορέας τους:

α) έχει διεύθυνση κάθετη στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των σωμάτων.

β) συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των σωμάτων.

γ) έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας των σωμάτων.

20.27) Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος όπου:

α) κάθε φορτίο δέχεται δύναμη.

β) κάθε μάζα δέχεται δύναμη.

γ) κάθε μάζα μεγαλύτερη από 1kg δέχεται δύναμη.

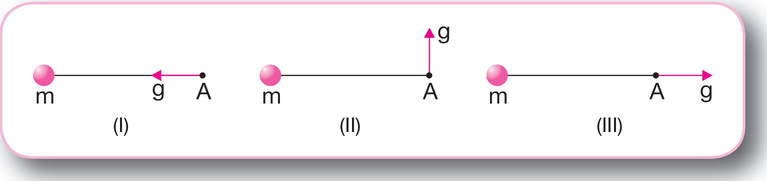
20.28) Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

Η ένταση (g) του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο:

α) έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο της δύναμης F που δέχεται μία μάζα m η οποία βρίσκεται σε αυτό το σημείο προς τη μάζα αυτή.
β) είναι διανυσματικό μέγεθος.
γ) έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της δύναμης F που δέχεται μία μάζα m από το βαρυτικό πεδίο.

20.29) Η μονάδα μέτρησης της έντασης του βαρυτικού πεδίου στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι το:
α) $1N/g$ β) $1m/s$ γ) $1N/kg$

20.30) Το σχήμα που δείχνει σωστά το διάνυσμα της έντασης στο σημείο Α του βαρυτικού πεδίου το οποίο δημιουργείται από μία μάζα m είναι το:



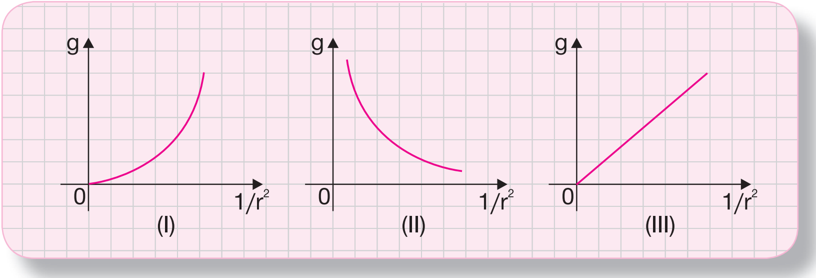
α) (I) β) (II) γ) (III)

20.31) Η ένταση ενός βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο του Α είναι $g=6m/s^2$. Ποια πρόταση είναι σωστή;
α) Εάν στο σημείο Α τοποθετήσουμε μάζα $m=2kg$, αυτή θα δεχτεί βαρυτική δύναμη $F=6N$.
β) Εάν στο σημείο Α τοποθετήσουμε μάζα $m=4kg$, αυτή θα δεχτεί βαρυτική δύναμη $F=24N$.
γ) Εάν στο σημείο Α τοποθετήσουμε μάζα $m=1kg$, αυτή θα δεχτεί βαρυτική δύναμη $F=3N$.

20.32) Σε κάθε σημείο του πεδίου βαρύτητας η ένταση:
α) έχει μέτρο διπλάσιο από το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
β) έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της επιτάχυνσης της βαρύτητας.
γ) ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

20.33) Μία σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Η ένταση g σε ένα σημείο του πεδίου που απέχει απόσταση r από τη σημειακή μάζα M δίνεται από τη σχέση:
α) $g=G\dfrac{M}{r}$ β) $g=G\dfrac{M^2}{r^2}$ γ) $g=G\dfrac{M}{r^2}$

20.34) Το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον παράγοντα $\frac{1}{r^2}$ το μέτρο g της έντασης ενός βαρυτικού πεδίου το οποίο έχει δημιουργήσει σημειακή μάζα είναι το:



α) (I) β) (II) γ) (III)

20.35) Σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Σε απόσταση $r_1 = 2r$ από τη σημειακή μάζα η ένταση του πεδίου έχει μέτρο g_1. Σε απόσταση $r_2 = 3r$ από τη σημειακή μάζα η ένταση του πεδίου έχει μέτρο g_2. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $g_2 = \frac{2}{9}g_1$ β) $g_2 = \frac{4}{9}g_1$ γ) $g_2 = \frac{2}{3}g_1$

20.36) Δυναμικό V του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο του Α ονομάζεται:

α) το γινόμενο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο Α στο άπειρο, επί τη μάζα αυτή.

β) το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο Α στο άπειρο, προς τη μάζα αυτή.

γ) το σταθερό πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν μεταφέρεται μάζα m από το σημείο Α στο άπειρο, προς το τετράγωνο της μάζας αυτής.

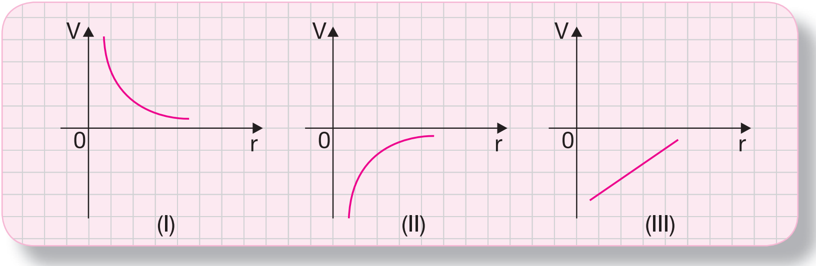
20.37) Η μονάδα μέτρησης του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι το:

α) 1J / g β) 1N / kg γ) 1J / kg

20.38) Μία σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Το δυναμικό V_A σε ένα σημείο A του πεδίου που απέχει απόσταση r από τη σημειακή μάζα M δίνεται από τη σχέση:

α) $V_A = -G\frac{M}{r^2}$ β) $V_A = G\frac{M}{r}$ γ) $V_A = -G\frac{M}{r}$

20.39) Το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση r η τιμή του δυναμικού ενός βαρυτικού πεδίου το οποίο έχει δημιουργήσει σημειακή μάζα M είναι το:



α) (I) β) (II) γ) (III)

20.40) Σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Σε απόσταση $r_1 = 3r$ από τη μάζα M το δυναμικό του πεδίου είναι V_1. Σε απόσταση $r_2 = 4r$ από τη μάζα M το δυναμικό του πεδίου είναι V_2. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $V_2 = \frac{3}{4}V_1$ β) $V_2 = \frac{2}{3}V_1$ γ) $V_2 = \frac{4}{5}V_1$

20.41) Σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Το δυναμικό σε ένα σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση r από τη σημειακή μάζα:

α) μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

β) εξαρτάται από τη μάζα που θα τοποθετήσουμε στο σημείο A.

γ) έχει απόλυτη τιμή που είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης r.

20.42) Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B ενός πεδίου βαρύτητας ονομάζεται:

α) το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας μάζας από το σημείο A έως το σημείο B προς το τετράγωνο της μάζας αυτής.

β) το πηλίκο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας μάζας από το σημείο A έως το σημείο B προς τη μάζα αυτή.

γ) το γινόμενο του έργου της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση μίας μάζας από το σημείο A έως το σημείο B επί τη μάζα αυτή.

20.43) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B ενός βαρυτικού πεδίου που έχει δημιουργηθεί από μία σημειακή μάζα:

α) αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου.

β) εξαρτάται από τη θέση των σημείων A και B.

γ) εξαρτάται από τη μάζα που θα μετακινηθεί από το σημείο A έως το σημείο B.

20.44) Σημειακή μάζα M δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Ποια πρόταση είναι σωστή;

α) Το δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου έχει θετική αλγεβρική τιμή.

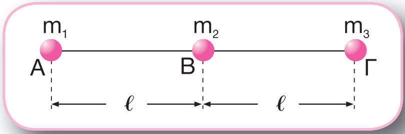
β) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του βαρυτικού πεδίου είναι πάντοτε αρνητική.

γ) Το δυναμικό και η διαφορά δυναμικού έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης.

20.45) Η δυναμική ενέργεια U ενός συστήματος δύο υλικών σημείων με μάζες m_1 και m_2 που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r υπολογίζεται από τη σχέση:

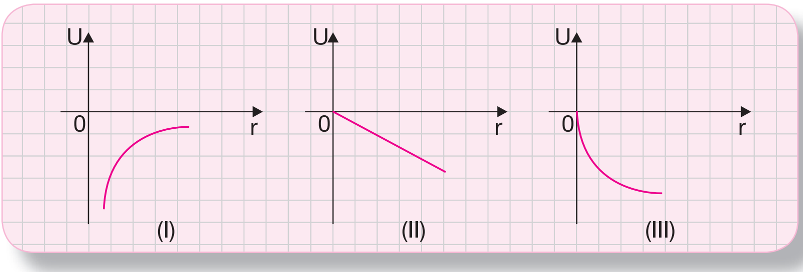
α) $U = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ β) $U = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$ γ) $U = G\dfrac{m_1 m_2}{r}$

20.46) Τρεις σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m_3 = m$ βρίσκονται στις θέσεις A, B και Γ ενός βαρυτικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γνωρίζουμε ότι $AB = B\Gamma = \ell$. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών μαζών είναι:



α) $U = -5G\dfrac{m^2}{2\ell}$ β) $U = -3G\dfrac{m^2}{2\ell}$ γ) $U = -3G\dfrac{m^2}{\ell}$

20.47) Το διάγραμμα που δείχνει πώς μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σημειακών μαζών σε συνάρτηση με την απόσταση r μεταξύ τους είναι το:



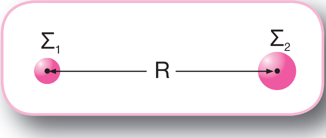
α) (I) β) (II) γ) (III)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

20.48) Δύο ομογενείς σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 έλκονται με δύναμη μέτρου F, όταν τα κέντρα τους απέχουν απόσταση r. Εάν τριπλασιάσουμε τη μάζα κάθε σφαίρας και υποδιπλασιάσουμε την απόσταση μεταξύ των κέντρων τους, το μέτρο F' της μεταξύ τους βαρυτικής δύναμης είναι:

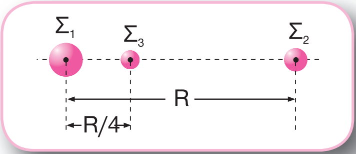
α) $F' = 9F$ β) $F' = 36F$ γ) $F' = 18F$

20.49) Τα κέντρα των δύο ομογενών σφαιρών Σ_1 και Σ_2 του σχήματος, με μάζες m_1 και $m_2 = 3m_1$ αντίστοιχα, απέχουν απόσταση R. Τα μέτρα των ελκτικών δυνάμεων F_1 και F_2 μεταξύ των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση:



α) $F_1 = 3F_2$ β) $F_2 = 3F_1$ γ) $F_2 = F_1$

20.50) Δύο ομογενείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες που συνδέονται με τη σχέση $m_1 = 2m_2$ βρίσκονται σε τέτοια θέση ώστε τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση R. Το κέντρο μίας τρίτης ομογενούς σφαίρας Σ_3 βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο άλλων σφαιρών σε απόσταση $d = \frac{R}{4}$ από το κέντρο της σφαίρας Σ_1, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2 που δέχεται η σφαίρα Σ_3 από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση:

α) $F_1 = 18F_2$ β) $F_1 = 9F_2$ γ) $F_1 = 3F_2$

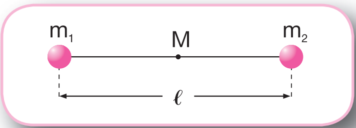
20.51) Δύο σωμάτια Σ_1 και Σ_2 με μάζες που συνδέονται με τη σχέση $m_1 = 4m_2$ συγκρατούνται ακίνητα σε απόσταση R. Αφήνουμε τα σωμάτια ελεύθερα να κινηθούν και θεωρούμε ότι η κίνησή τους επηρεάζεται μόνο από τη βαρυτική αλληλεπίδραση. Ποια πρόταση είναι σωστή;

α) Τα σωμάτια θα αρχίσουν να απομακρύνονται, εκτελώντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β) Τα σωμάτια θα αρχίσουν να πλησιάζουν κινούμενα ευθύγραμμα ομαλά.

γ) Τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωματίων κάθε χρονική στιγμή μέχρι να έρθουν σε επαφή συνδέονται με τη σχέση $\alpha_2 = 4\alpha_1$.

20.52) Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 4m$ βρίσκονται σε απόσταση ℓ μεταξύ τους και έξω από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από τις δύο σφαίρες στο μέσο M της απόστασης μεταξύ τους είναι:

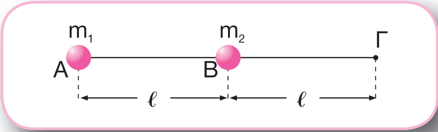


α) $g_M = 20G\frac{m}{\ell^2}$ β) $g_M = 6G\frac{m}{\ell^2}$ γ) $g_M = 12G\frac{m}{\ell^2}$

20.53) Μία μικρή σφαίρα μάζας m δημιουργεί βαρυτικό πεδίο. Το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο Α που απέχει από τη σφαίρα απόσταση $d_A = d$ είναι $g_A = 90N/kg$. Το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο Β που απέχει από τη σφαίρα απόσταση $d_B = \frac{3d}{4}$ είναι:

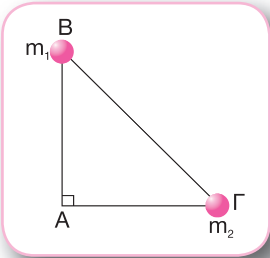
α) $g_B = 160N/kg$ β) $g_B = 67,5N/kg$ γ) $g_B = 80N/kg$

20.54) Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 4m$ και $m_2 = m$ βρίσκονται σε απόσταση ℓ μεταξύ τους στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Στο σημείο Γ που βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τα σημεία Α και Β και σε απόσταση ℓ από το σημείο Β, όπως φαίνεται στο σχήμα, η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου έχει μέτρο:



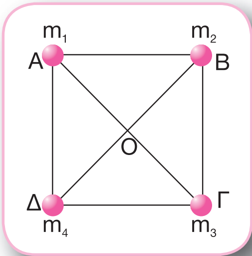
α) $g_\Gamma = G\frac{m}{\ell^2}$ β) $g_\Gamma = 2G\frac{m}{\ell^2}$ γ) $g_\Gamma = 4G\frac{m}{\ell^2}$

20.55) Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m_2 = m$ βρίσκονται στις κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = d$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από τις δύο σφαίρες στην κορυφή Α του τριγώνου είναι:



α) $g_A = G\frac{m\sqrt{2}}{d^2}$ β) $g_A = G\frac{m\sqrt{3}}{d^2}$ γ) $g_A = G\frac{m\sqrt{5}}{d^2}$

20.56) Τέσσερις μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ βρίσκονται στις κορυφές Α, Β, Γ και Δ ενός τετραγώνου πλευράς d, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από τις τέσσερις σφαίρες στο κέντρο Ο του τετραγώνου είναι:



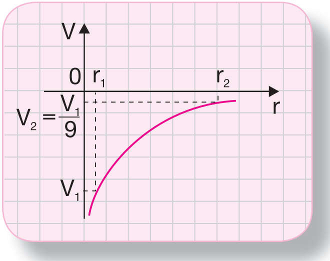
α) $g_O = 2G\frac{m}{d^2}$ β) $g_O = 4G\frac{m}{d^2}$ γ) $g_O = 0$

20.57) Μία μικρή σφαίρα μάζας m δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Το μέτρο του δυναμικού σε ένα σημείο Α του πεδίου που βρίσκεται σε απόσταση r_A από τη σφαίρα είναι κατά 40%

μικρότερο από το μέτρο του δυναμικού σε ένα σημείο Β του πεδίου που απέχει απόσταση r_B από τη σφαίρα. Ποια σχέση είναι σωστή;

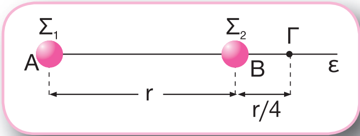
α) $\dfrac{r_B}{r_A}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ β) $\dfrac{r_B}{r_A}=\dfrac{3}{5}$ γ) $\dfrac{r_B}{r_A}=\dfrac{5}{3}$

20.58) Μία μικρή σφαίρα μάζας m δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται πώς μεταβάλλεται το δυναμικό σε ένα σημείο του πεδίου σε συνάρτηση με την απόστασή του από τη σφαίρα. Ποια σχέση είναι σωστή;



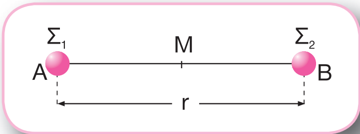
α) $r_2=9r_1$ β) $r_2=3r_1$ γ) $r_2=6r_1$

20.59) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=m$ και $m_2=6m$ βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση r μεταξύ τους. Ένα σημείο Γ της ευθείας ε βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και απέχει από αυτό απόσταση $\mathrm{B\Gamma}=\dfrac{r}{4}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό δυναμικό στο σημείο Γ είναι:



α) $V_\Gamma=-\dfrac{58}{5}G\dfrac{m}{r}$ β) $V_\Gamma=-\dfrac{116}{5}G\dfrac{m}{r}$ γ) $V_\Gamma=-\dfrac{124}{5}G\dfrac{m}{r}$

20.60) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1=m$ και $m_2=4m$ βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση r μεταξύ τους. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι **λανθασμένη**;



α) Στο μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ το συνολικό δυναμικό είναι μηδέν.

β) Η συνολική ένταση του πεδίου είναι μηδέν σε ένα σημείο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που απέχει απόσταση $\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{r}{3}$ από το σημείο Α.

γ) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι μηδέν.

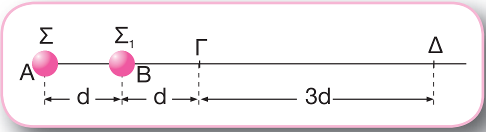
20.61) Μία μικρή σφαίρα Σ μάζας m δημιουργεί ένα βαρυτικό πεδίο. Σε ένα σημείο Β του πεδίου, το οποίο απέχει απόσταση r_1 από τη σφαίρα Σ, αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί μία μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας m_1. Η σφαίρα Σ_1 θα κινηθεί:

α) προς σημεία με υψηλότερο δυναμικό.

β) αρχικά προς σημεία με υψηλότερο δυναμικό και στη συνέχεια προς σημεία με χαμηλότερο δυναμικό.

γ) προς σημεία με χαμηλότερο δυναμικό.

20.62) Μία ακίνητη μικρή σφαίρα Σ μάζας M βρίσκεται σε ένα σημείο Α και δημιουργεί βαρυτικό πεδίο. Σε ένα σημείο Β του πεδίου αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί μία μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας m. Η σφαίρα Σ_1 μετακινείται αρχικά από το Β έως το Γ και στη συνέχεια από το Γ έως το Δ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γνωρίζουμε ότι $AB = B\Gamma = d$ και $\Gamma\Delta = 3d$. Εάν $W_F^{B\to\Gamma}$ και $W_F^{\Gamma\to\Delta}$ είναι τα έργα της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση της σφαίρας Σ_1 από το Β έως το Γ και από το Γ έως το Δ αντίστοιχα, ποια σχέση είναι σωστή;



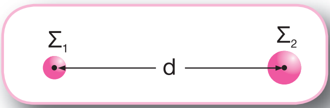
α) $W_F^{\Gamma\to\Delta} = \dfrac{3}{5} W_F^{B\to\Gamma}$ β) $W_F^{\Gamma\to\Delta} = W_F^{B\to\Gamma}$ γ) $W_F^{\Gamma\to\Delta} = \dfrac{3}{10} W_F^{B\to\Gamma}$

Στις παρακάτω Ασκήσεις και Προβλήματα δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

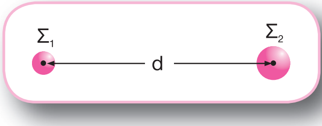
20.63) Δύο πρωτόνια βρίσκονται σε απόσταση $r = 2 \cdot 10^{-15} m$. Δίνεται η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$. Να υπολογίσετε το μέτρο της βαρυτικής έλξης μεταξύ των δύο πρωτονίων. Πόσο γίνεται το μέτρο της βαρυτικής έλξης μεταξύ των δύο πρωτονίων, εάν διπλασιαστεί η μεταξύ τους απόσταση;

20.64) Δύο ομογενείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 25 kg$ και $m_2 = 49 kg$ αντίστοιχα συγκρατούνται σε τέτοια θέση ώστε τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση $d = 24 m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε:



α) σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετηθεί μία τρίτη σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 2 kg$ ανάμεσα στις άλλες δύο σφαίρες ώστε να ισορροπεί, β) τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται η σφαίρα Σ_3, όταν τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα κέντρα των σφαιρών Σ_1 και Σ_2.

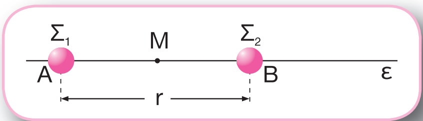
20.65) Δύο ομογενείς σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 20kg$ και $m_2 = 60kg$ αντίστοιχα συγκρατούνται σε τέτοια θέση ώστε τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση $d = 10m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε:



α) το μέτρο της βαρυτικής έλξης που δέχεται κάθε σφαίρα,
β) τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται μία τρίτη σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 40kg$, όταν τοποθετηθεί σε τέτοια θέση ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών, αριστερά από τη σφαίρα Σ_1 και σε απόσταση $d_1 = 10m$ από το κέντρο της.

20.66) Μία μικρή σφαίρα μάζας M δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο. Το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο Α του πεδίου που απέχει από τη σφαίρα απόσταση $r_A = 1m$ είναι $g_A = 6{,}673 \cdot 10^{-10} N/kg$. Να υπολογίσετε:
α) τη μάζα M,
β) το μέτρο της βαρυτικής δύναμης F που δέχεται μικρή σφαίρα μάζας $m = 1kg$, όταν τοποθετείται στο σημείο Α,
γ) το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο Β που βρίσκεται σε απόσταση r_B κατά 40% μικρότερη από την απόσταση r_A.

20.67) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 9m_1$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση r μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου και να υπολογίσετε το μέτρο της:
α_1) στο μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ,
α_2) σε ένα σημείο Γ της ευθείας ε που βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και απέχει απόσταση $2r$ από αυτό.
Β. Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Δ της ευθείας ε στο οποίο η συνισταμένη ένταση του πεδίου είναι μηδέν.

20.68) Μία μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = 0,5\text{kg}$ είναι ακίνητη σε σημείο Α και δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο.

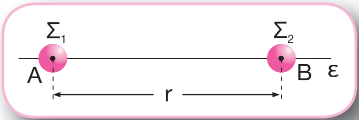
Α. Το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο Β του πεδίου που απέχει από τη σφαίρα απόσταση $r_B = r$ είναι $g_B = 3,3365 \cdot 10^{-9}\,\text{N/kg}$. Να υπολογίσετε:

α$_1$) την απόσταση r,

α$_2$) το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το πεδίο μία μικρή σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{kg}$, που τοποθετείται σε ένα σημείο Γ το οποίο απέχει από τη σφαίρα Σ_1 απόσταση $r_\Gamma = 2r$.

Β. Σε ένα σημείο Δ το ποσοστό στα εκατό της μείωσης της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε σχέση με την ένταση στο σημείο Β είναι $\pi_g\% = \frac{800}{9}\%$. Να υπολογίσετε την απόσταση $r_\Delta = \mathrm{A\Delta}$.

20.69) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 36m_1$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση r μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιορίσετε:



α) τη θέση ενός σημείου Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ όπου τα μέτρα των εντάσεων g_1 και g_2 των βαρυτικών πεδίων που δημιουργούνται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $g_2 = 36g_1$,

β) τη θέση ενός σημείου Δ της ευθείας ε που βρίσκεται αριστερά από το σημείο Α και όπου τα μέτρα των εντάσεων g_1' και g_2' των βαρυτικών πεδίων που δημιουργούνται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $g_1' = \frac{1}{4}g_2'$,

γ) τη θέση ενός σημείου Ε της ευθείας ε που βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και όπου τα μέτρα των εντάσεων g_1'' και g_2'' των βαρυτικών πεδίων που δημιουργούνται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $g_1'' = \frac{1}{100}g_2''$.

20.70) Μία μικρή σφαίρα Σ μάζας $m = 2\text{kg}$ είναι ακίνητη σε ένα σημείο και δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο. Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο του Α που απέχει από τη σφαίρα απόσταση r_A είναι $V_A = -6,673 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_A.

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου σε συνάρτηση με την απόσταση από τη σφαίρα Σ για αποστάσεις από $r = 0\text{m}$ έως $r = r_A$.

γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της απόλυτης τιμής του δυναμικού στο σημείο Α, εάν η σφαίρα Σ αντικατασταθεί με άλλη σφαίρα Σ' που έχει μάζα $m' = 0,5kg$.

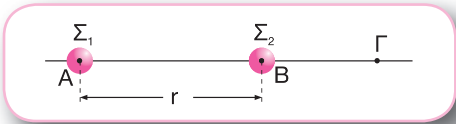
20.71) Μία μικρή σφαίρα Σ μάζας $m = 4kg$ είναι ακίνητη σε ένα σημείο και δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο. Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο του Α είναι $V_A = -1,66825 \cdot 10^{-11} J/kg$ και το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου σε ένα σημείο του Β είναι $g_B = 6,673 \cdot 10^{-13} N/kg$. Να υπολογίσετε:

α) τις αποστάσεις r_A και r_B των σημείων Α και Β αντίστοιχα από τη σφαίρα Σ,

β) το δυναμικό στο σημείο Β,

γ) το έργο της βαρυτικής δύναμης για μετακίνηση μίας μάζας $m_1 = 2kg$ από το σημείο Β στο σημείο Α.

20.72) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = \frac{m_1}{8}$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση r μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα.

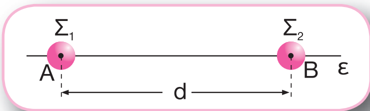


α) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Γ της ευθείας ε που βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και όπου οι απόλυτες τιμές των δυναμικών $|V_1|$ και $|V_2|$ των βαρυτικών πεδίων που δημιουργούνται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $|V_1| = 4|V_2|$.

β) Στο σημείο Γ τοποθετούμε μία σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 2m_1$. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας Σ_3.

γ) Να υπολογίσετε το έργο της βαρυτικής δύναμης για μετακίνηση της σφαίρας Σ_3 από το σημείο Γ σε ένα σημείο όπου δε δέχεται καμία επίδραση από τις δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2.

20.73) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 4m$ και $m_2 = 49m$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα.



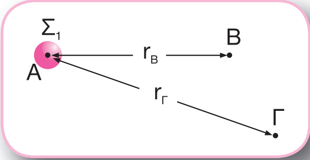
α) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Γ της ευθείας ε όπου η συνολική ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν.

β) Να υπολογίσετε το δυναμικό V_Γ του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Γ.

γ) Να υπολογίσετε το έργο της βαρυτικής δύναμης για μετακίνηση μίας μάζας $m_3 = m$

από το σημείο Γ σε ένα σημείο Δ όπου το δυναμικό V_Δ του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 είναι $V_\Delta = 2V_\Gamma$.

20.74) Μία μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ είναι ακίνητη σε ένα σημείο Α και δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο. Μία άλλη μικρή σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\text{kg}$ μετακινείται από ένα σημείο Β, που απέχει από τη σφαίρα Σ_1 απόσταση $r_B = 1\text{m}$, σε ένα σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κατά τη μετακίνηση της σφαίρας Σ_2 είναι $\Delta U_{B\Gamma} = +6,673 \cdot 10^{-11}\text{J}$.

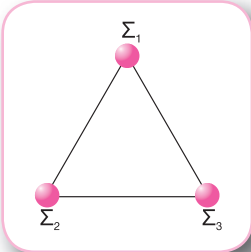


α) Να υπολογίσετε το δυναμικό στο σημείο Β.

β) Να βρείτε την απόσταση r_Γ του σημείου Γ από τη σφαίρα Σ_1.

γ) Να συγκρίνετε τα μέτρα των βαρυτικών δυνάμεων F_B και F_Γ που δέχεται η σφαίρα Σ_2 στις θέσεις Β και Γ αντίστοιχα.

20.75) Τρεις μικρές σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$ και $m_3 = 3\text{kg}$ αντίστοιχα βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς $\alpha = 0,6673\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

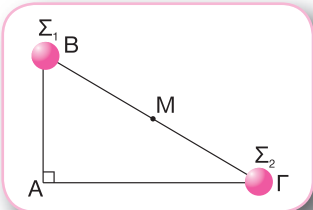


α) τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών μαζών,

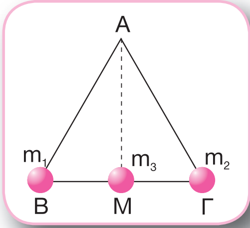
β) την ενέργεια που απαιτείται ώστε οι τρεις σφαίρες να μεταφερθούν στο άπειρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

20.76) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 10m$ βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές Β και Γ αντίστοιχα ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές $AB = \alpha$ και $A\Gamma = \alpha\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου έχει μέτρο g_M. Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στην κορυφή Α του τριγώνου σε συνάρτηση με την ένταση g_M.



20.77) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά α. Στις κορυφές Β και Γ και στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου βρίσκονται ακίνητες τρεις μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m$, $m_2 = m$ και $m_3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}m$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

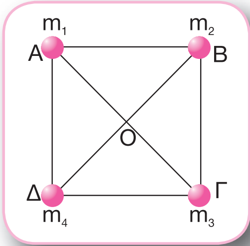


α) το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στην κορυφή Α του τριγώνου,

β) το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου στην κορυφή Α,

γ) το έργο της συνολικής βαρυτικής δύναμης για τη μετακίνηση μίας μάζας $m_4 = m$ από την κορυφή Α στο άπειρο.

20.78) Τέσσερις μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m, m_2 = 4m, m_3 = m$ και $m_4 = 2m$ βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές Α, Β, Γ και Δ αντίστοιχα ενός τετραγώνου πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

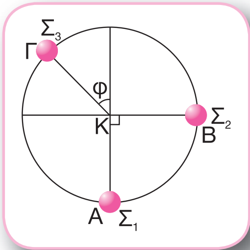


α) το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου στο κέντρο Ο του τετραγώνου,

β) τη δυναμική ενέργεια μίας μικρής σφαίρας μάζας $m_5 = 2\sqrt{2}m$, εάν αυτή τοποθετηθεί στο σημείο Ο,

γ) το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Ο.

20.79) Τρεις μικρές σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 με μάζες $m_1 = m, m_2 = m$ και $m_3 = m\sqrt{2}$ συγκρατούνται ακίνητες στα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα της περιφέρειας ενός κύκλου κέντρου Κ και ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γνωρίζουμε ότι $\varphi = 45°$. Να υπολογίσετε:

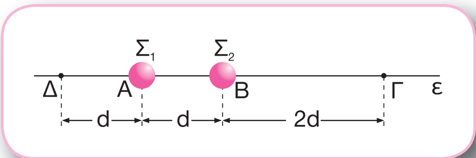


α) το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Κ,

β) το έργο της συνολικής βαρυτικής δύναμης για τη μετακίνηση μίας μάζας $m_4 = 2m$ από το σημείο Κ στο άπειρο,

γ) τη συνολική ένταση του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Κ.

20.80) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 8m$ βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους. Το συνο-



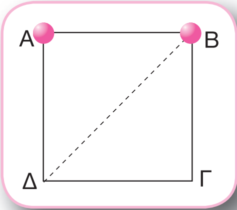
λικό δυναμικό σε ένα σημείο Γ της ευθείας ε που βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και απέχει από αυτό απόσταση 2d, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι V_Γ. Να υπολογίσετε:

α) το συνολικό δυναμικό V_Δ σε ένα σημείο Δ της ευθείας ε που βρίσκεται αριστερά από το σημείο Α και απέχει από αυτό απόσταση d σε συνάρτηση με το δυναμικό V_Γ,

β) το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση μικρής σφαίρας μάζας m από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Δ,

γ) τον λόγο $\dfrac{g_\Gamma}{g_\Delta}$ των μέτρων των εντάσεων g_Γ και g_Δ του βαρυτικού πεδίου στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

20.81) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$ βρίσκονται ακίνητες στις κορυφές Α και Β αντίστοιχα ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται: $\sqrt{2} = 1,41$. Να υπολογίσετε:



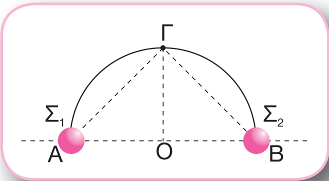
α) το μέτρο της δύναμης μεταξύ των δύο σφαιρών,

β) το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου V_Γ και V_Δ στις κορυφές Γ και Δ αντίστοιχα του τετραγώνου,

γ) το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση μικρής σφαίρας μάζας $m_3 = m_1$ από το σημείο Γ στο άπειρο,

δ) το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Δ.

20.82) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = m$ βρίσκονται ακίνητες στα άκρα Α και Β αντίστοιχα της διαμέτρου ΑΒ ενός ημικυκλίου ΑΓΒ που έχει κέντρο Ο και ακτίνα R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται: $\sqrt{2} = 1,41$. Να υπολογίσετε:

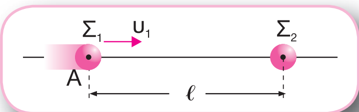


α) το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου V_Γ και V_O στο μέσο Γ του ημικυκλίου και στο κέντρο του Ο αντίστοιχα,

β) το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση μικρής σφαίρας μάζας $m_3 = m$ από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Ο,

γ) το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου στο σημείο Γ.

20.83) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 4m$ και $m_2 = m$ αντίστοιχα βρίσκονται ακίνητες σε απόσταση ℓ μεταξύ τους. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ προσδίδου-

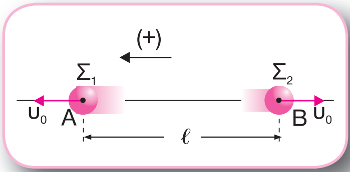


με στη σφαίρα Σ_1 ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = \upsilon$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κατά τη διάρκεια της κίνησης των σφαιρών επιδρά μόνο η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα της σφαίρας Σ_2, όταν η σφαίρα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = 2\upsilon$, καθώς και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών την ίδια χρονική στιγμή,

β) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών είναι ίσα.

20.84) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 2m$ και $m_2 = m$ αντίστοιχα βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β σε απόσταση ℓ μεταξύ τους. Κάποια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε ταυτόχρονα τις δύο σφαίρες με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που επιδρά στις σφαίρες είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη. Να υπολογίσετε:

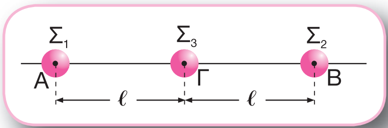


α) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε σφαίρας τη στιγμή της εκτόξευσης,

β) το μέτρο της ταχύτητας της μίας σφαίρας τη χρονική στιγμή κατά την οποία σταματάει για πρώτη φορά η άλλη, καθώς και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών την ίδια χρονική στιγμή,

γ) την κοινή ταχύτητα που θα αποκτήσουν οι σφαίρες.

20.85) Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = m$ συγκρατούνται ακίνητες στα σημεία Α και Β σε απόσταση 2ℓ μεταξύ τους. Μία τρίτη σφαίρα Σ_3 μάζας $m_3 = 2m$ βρίσκεται στο μέσο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή αφήνουμε ταυτόχρονα τις τρεις σφαίρες ελεύθερες να κινηθούν. Θεωρούμε ότι οι μοναδικές δυνάμεις που επιδρούν στις σφαίρες είναι οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούν η μία στην άλλη.



α) Να αποδείξετε ότι η σφαίρα Σ_3 θα παραμείνει ακίνητη.

β) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος των τριών σφαιρών τη χρονική στιγμή κατά την οποία οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση ℓ.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

α) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

i) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο έχει πάντα αντίθετη κατεύθυνση με τη δύναμη που θα ασκηθεί σε μία μάζα, εάν βρεθεί σε εκείνο το σημείο.

ii) Όταν ένα σώμα κινείται σε βαρυτικό πεδίο, το έργο της δύναμης του πεδίου είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα και εξαρτάται μόνο από την τελική θέση του σώματος.

iii) Όταν μία μάζα αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί στο βαρυτικό πεδίο, κινείται προς τα σημεία που το δυναμικό μειώνεται.

β) Δύο μικρές σφαίρες $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β σε απόσταση ℓ μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που επιδρά στις σφαίρες είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη. Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

i) Για να αυξήσουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών, πρέπει να μειώσουμε τη μεταξύ τους απόσταση.

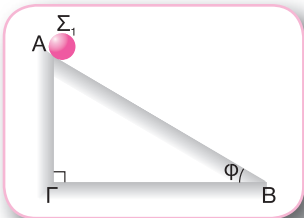
ii) Εάν μειώσουμε κατά 50% την απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών, μειώνεται και η δυναμική ενέργεια του συστήματος κατά 50%.

iii) Το έργο της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη για μετακίνηση των δύο σφαιρών στο άπειρο δίνεται από τη σχέση $W = G\frac{m_1 m_2}{\ell}$.

Θέμα 2ο

α) Μία μικρή σφαίρα $Σ_1$ μάζας m_1 δημιουργεί γύρω της βαρυτικό πεδίο. Τα μέτρα της έντασης του βαρυτικού πεδίου g_B και $g_Γ$ σε δύο σημεία Β και Γ αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $g_Γ = \frac{g_B}{36}$. Οι δυναμικές ενέργειες U_B και $U_Γ$ που έχει μία σφαίρα $Σ_2$ μάζας m_2, όταν βρίσκεται στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση:

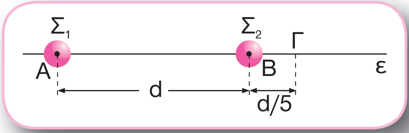
i) $\frac{U_B}{U_Γ} = 36$ ii) $\frac{U_B}{U_Γ} = 6$ iii) $\frac{U_B}{U_Γ} = 3$



β) Μία μικρή σφαίρα $Σ_1$ μάζας m_1 είναι ακίνητη στην κορυφή Α λείου κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δυναμικά του βαρυτικού πεδίου V_B και $V_Γ$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $\frac{V_Γ}{V_B} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι:

i) $\varphi = \frac{\pi}{4}\text{rad}$ ii) $\varphi = \frac{\pi}{6}\text{rad}$ iii) $\varphi = \frac{\pi}{3}\text{rad}$

Θέμα 3ο



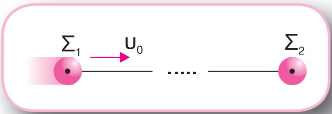
Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται ακίνητες στα σημεία Α και Β αντίστοιχα μίας ευθείας ε και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους. Σε ένα σημείο Γ της ευθείας ε που βρίσκεται δεξιά από το σημείο Β και απέχει από αυτό απόσταση $\frac{d}{5}$, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα μέτρα της έντασης των βαρυτικών πεδίων g_1 και g_2 που δημιουργούνται από τις μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $g_2 = 72g_1$. Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Να υπολογίσετε:

α) τον λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ των δύο μαζών,

β) τις μάζες m_1 και m_2, εάν γνωρίζουμε ότι η δύναμη μεταξύ τους έχει μέτρο $F = 13{,}4 \cdot 10^{-11}\text{N}$ και η απόστασή τους είναι $d = 2\text{m}$,

γ) το συνολικό δυναμικό V_Γ στο σημείο Γ.

Θέμα 4ο



Δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 3m_1$ αντίστοιχα ηρεμούν σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Κάποια χρονική στιγμή προσδίδουμε στη σφαίρα Σ_1 ταχύτητα μέτρου υ_0, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μοναδική δύναμη που δέχονται οι δύο σφαίρες είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη. Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη G, m_1 και υ_0. Να υπολογίσετε:

α) την απόσταση ℓ μεταξύ των σφαιρών, όταν τα μέτρα των ταχυτήτων υ_1 και υ_2 των δύο σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $\upsilon_1 = 4\upsilon_2$,

β) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών, όταν απέχουν απόσταση ℓ μεταξύ τους,

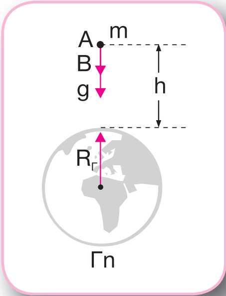
γ) το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μία σφαίρα στην άλλη, όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι ℓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21ο

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

21.1) Πώς υπολογίζεται η ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης;



Έστω ένα σημείο Α που βρίσκεται σε απόσταση h από την επιφάνεια της Γης και επομένως σε απόσταση $R_\Gamma + h$ από το κέντρο της. Θεωρώντας με ικανοποιητική προσέγγιση τη Γη ως μία ομογενή σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ, η ένταση του βαρυτικού πεδίου της στο σημείο Α δίνεται από τη σχέση: $g_A = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$

Παρομοίως, το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο Α δίνεται από τη σχέση: $V_A = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$

- Εάν στη σχέση $g = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$ θέσουμε $M_\Gamma = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $R_\Gamma = 6{,}38 \cdot 10^{6}\,\text{m}$ και $h = 0$, υπολογίζουμε την ένταση g_0 του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της:

$$g_0 = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \quad \text{ή} \quad g_0 = 9{,}8\,\text{m}/\text{s}^2$$

Η ένταση και το δυναμικό σε ένα σημείο του πεδίου βαρύτητας δεν εξαρτώνται από τη μάζα του σώματος που μπορεί να βρίσκεται σε αυτό το σημείο.

Όταν αφήσουμε ένα σώμα να κινηθεί ελεύθερα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, αυτό κινείται από σημεία με υψηλό δυναμικό προς σημεία με χαμηλότερο δυναμικό.

Ο Νεύτωνας απέδειξε ότι τις παλίρροιες τις προκαλούν οι διαφορές στη βαρυτική έλξη της Σελήνης στις εκ διαμέτρου αντίθετες πλευρές της Γης.

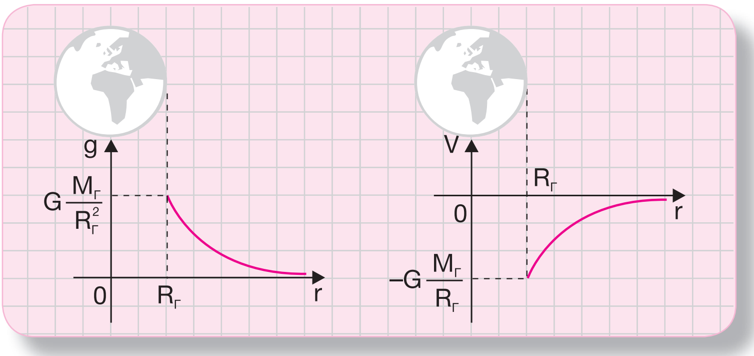
21.2) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα $g = f(r)$ και $V = f(r)$ που δείχνουν πώς μεταβάλλεται το μέτρο της έντασης g και το δυναμικό V του βαρυτικού πεδίου της Γης σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της.

Οι σχέσεις $g = G\frac{M_\Gamma}{r^2}$ και $V_A = -G\frac{M_\Gamma}{r}$ δίνουν το μέτρο της έντασης και το δυναμικό αντίστοιχα του βαρυτικού πεδίου της Γης σε σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό της, δηλαδή για $r \geq R_\Gamma$. Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις, το μέτρο της έντασης είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r από το κέντρο της Γης, ενώ η απόλυτη τιμή του δυναμικού είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης r.

Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι μηδέν στο άπειρο.

Στην περίπτωση που μελετάμε κινήσεις δορυφόρων, πυραύλων κτλ. που γίνονται σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις από τη Γη, το δυναμικό θεωρείται μηδέν στο άπειρο, ενώ έχει αρνητική τιμή στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Η φυσική σημασία του αρνητικού προσήμου είναι ότι για τη μεταφορά ενός σώματος εκτός του πεδίου απαιτείται προσφορά ενέργειας σε αυτό.

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται πώς μεταβάλλεται το μέτρο της έντασης g και το δυναμικό V του βαρυτικού πεδίου της Γης σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της.



21.3) Πώς υπολογίζεται η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από το βαρυτικό πεδίο της Γης;

Έστω ένα σώμα Σ μάζας m που βρίσκεται σε ένα σημείο Α στην επιφάνεια της Γης.

> Ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος ονομάζεται η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα ώστε να διαφύγει οριστικά από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα διαφυγής του σώματος Σ, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος Γη-σώμα Σ. Προκειμένου να απλουστεύσουμε το πρόβλημα, θεωρούμε ότι η Γη δεν κινείται και αγνοούμε τις βαρυτικές επιδράσεις από τα άλλα ουράνια σώματα και την αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Κατά την κίνηση του σώματος Σ μεταξύ δύο θέσεων ισχύει:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) μεταξύ του σημείου Α και του άπειρου, δηλαδή εκεί όπου δεν υπάρχει βαρυτική έλξη και επομένως η δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-σώμα Σ είναι μηδέν. Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα είναι αυτή για την οποία το σώμα θα φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα. Επομένως:

$$K_1 + U_1 = 0 + 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 + \left(-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}\right) = 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \quad (2)$$

Θέτοντας τις τιμές $M_\Gamma = 5,98 \cdot 10^{24}\,kg$, $R_\Gamma = 6,38 \cdot 10^6\,m$ και $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2 / kg^2$, προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$\upsilon_\delta = 11,2\,km/s = 40.320\,km/h$$

- Εάν εκτοξεύσουμε το σώμα από ένα σημείο που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης, προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής του σώματος δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$

Ένας δορυφόρος κοντά στην επιφάνεια της Γης πρέπει να έχει εφαπτομενική ταχύτητα μεταξύ $8km/s$ και $11,2km/s$. Με ταχύτητα μικρότερη των $8km/s$ θα πέσει στη Γη, ενώ με ταχύτητα πάνω από $11,2km/s$ θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης και θα τεθεί σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο ή κάποιο άλλο σώμα. Με ταχύτητα μεγαλύτερη από $42,5km/s$ θα ξεφύγει τελείως από το ηλιακό σύστημα.
Η αρχική ώθηση που δίνεται στον δορυφόρο τον ανεβάζει πάνω από την ατμόσφαιρα. Μία άλλη ώθηση του δίνει οριζόντια ταχύτητα μεταξύ $8km/s$ και $11,2km/s$, για να τεθεί σε τροχιά γύρω από τη Γη. Για να έχουμε την τροχιά που επιθυμούμε, έχουμε συνεχείς πυροδοτήσεις από βοηθητικούς πυραύλους που διαθέτει ο δορυφόρος ώστε να γίνονται οι διορθώσεις που απαιτούνται.

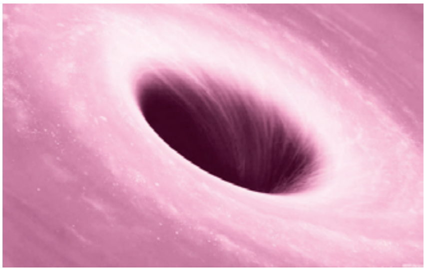
21.4) Τι είναι οι μαύρες τρύπες;

Εάν στη σχέση $\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, που δίνει την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια ενός ουράνιου σώματος μάζας Μ και ακτίνας R, θέσουμε $\upsilon_\delta = c$, όπου $c = 3 \cdot 10^8\,m/s$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στον αέρα, και λύσουμε ως προς R, έχουμε: $R_S = \frac{2GM}{c^2}$

Η ακτίνα αυτή ονομάζεται **ακτίνα Schwarzschild**. Εάν ένα ουράνιο σώμα μάζας M έχει ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα Schwarzschild, δεν επιτρέπει σε τίποτε, ούτε καν στο φως, να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητάς του.

Ως **μαύρες τρύπες** χαρακτηρίζονται στη σύγχρονη φυσική τα ουράνια σώματα τα οποία έχουν ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα Schwarzschild και επομένως δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμα, αλλά κάνουν αισθητή την παρουσία τους από τις ισχυρότατες βαρυτικές έλξεις που ασκούν στον περίγυρό τους.

Η πυκνότητα της ύλης σε μία μαύρη τρύπα είναι τεράστια. Για παράδειγμα, για να περιπέσουν ο Ήλιος και η Γη σε κατάσταση μαύρης τρύπας, πρέπει να συμπιεσθούν τόσο, ώστε οι ακτίνες τους να γίνουν $R_H = 3km$ και $R_\Gamma = 9mm$ αντίστοιχα.



Ο όρος μαύρη τρύπα είναι ευρύτατα διαδεδομένος και επινοήθηκε το 1967 από τον Αμερικανό αστρονόμο και θεωρητικό φυσικό Τζον Γουίλερ. Δεν αναφέρεται σε τρύπα με τη συνήθη έννοια του όρου, αλλά σε μια περιοχή από το βαρυτικό πεδίο της οποίας τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει.

21.5) Να συγκρίνετε το βαρυτικό με το ηλεκτροστατικό πεδίο.

Τα δύο πεδία παρουσιάζουν ορισμένες **ομοιότητες**:

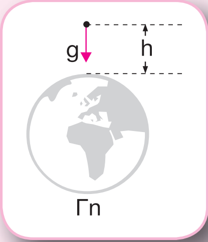
- Οι δυνάμεις ακολουθούν τον νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου, δηλαδή τα μέτρα τους είναι αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης.
- Οι φορείς των δυνάμεων βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα σημειακά φορτία ή τις σημειακές μάζες, δηλαδή οι δυνάμεις είναι κεντρικές.
- Οι δυνάμεις είναι συντηρητικές.

Τα δύο πεδία παρουσιάζουν ουσιαστικές **διαφορές**:

- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι ελκτικές ή απωστικές, ενώ οι βαρυτικές δυνάμεις είναι μόνο ελκτικές.
- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις εξαρτώνται από το είδος του υλικού που υπάρχει ανάμεσα στα φορτία, ενώ οι βαρυτικές δυνάμεις δεν εξαρτώνται από το υλικό που υπάρχει ανάμεσα στις μάζες.
- Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικών φορτίων, αλλά μόνο ένα είδος μάζας.
- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις κυριαρχούν στον μικρόκοσμο (άτομα, μόρια κτλ.), ενώ οι βαρυτικές δυνάμεις κυριαρχούν στον μακρόκοσμο (μεγάλα σώματα, πλανήτες κτλ.).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

➢ **Ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης**



Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης σε απόσταση h από την επιφάνειά της δίνεται από τη σχέση $g = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$.

- **Σχέση έντασης g με την ένταση g_0 στην επιφάνεια της Γης**

  Στην επιφάνεια της Γης η ένταση του βαρυτικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση $g_0 = G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$. Επομένως:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}} \quad \text{ή} \quad \frac{g}{g_0} = \frac{R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)^2$$

- **Σχέση έντασης g με την πυκνότητα ρ της Γης**

  Εάν θεωρήσουμε τη Γη ως ομογενή σφαίρα με πυκνότητα ρ, η μάζα της δίνεται από τη σχέση $M_\Gamma = \rho V_\Gamma$. Επειδή ο όγκος της Γης δίνεται από τη σχέση $V_\Gamma = \dfrac{4}{3}\pi R_\Gamma^3$, έχουμε:

$$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} \quad \text{ή} \quad g = \frac{4}{3}G\frac{\rho\pi R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2}$$

  Για $h = 0$ ισχύει: $g_0 = \dfrac{4}{3}G\rho\pi R_\Gamma$

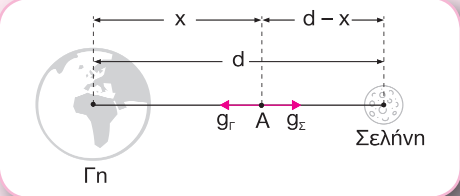
- **Σχέση έντασης g με το δυναμικό V του βαρυτικού πεδίου**

  Σε απόσταση h από την επιφάνεια της Γης το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$. Επομένως:

$$\frac{g}{V} = \frac{G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}}{-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \quad \text{ή} \quad \frac{g}{V} = -\frac{1}{R_\Gamma + h} \quad \text{ή} \quad g = -\frac{V}{R_\Gamma + h}$$

➢ **Εύρεση σημείου ανάμεσα στη Γη και στη Σελήνη όπου η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν**

Έστω ότι το σημείο Α, όπου η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδέν, απέχει από το κέντρο της Γης απόσταση x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρώντας ότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων της Γης και της Σελήνης είναι d, το σημείο Α απέχει από το κέντρο της Σελήνης απόσταση $d-x$. Γνωρίζουμε ότι οι μάζες της Γης και της Σελήνης, M_Γ και M_Σ αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}=81$. Επομένως:



$$\vec{g}=0 \;\; ή \;\; g_\Gamma-g_\Sigma=0 \;\; ή \;\; g_\Gamma=g_\Sigma \;\; ή \;\; G\frac{M_\Gamma}{x^2}=G\frac{M_\Sigma}{(d-x)^2} \;\; ή \;\; \frac{x^2}{(d-x)^2}=\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} \;\; ή \;\; \frac{x^2}{(d-x)^2}=81$$

Άρα: $\frac{x}{d-x}=9$ ή $x=9d-9x$ ή $x=\frac{9d}{10}$ και $\frac{d-x}{x}=-9$ (απορρίπτεται, επειδή $x>0$ και $d-x>0$)

- **Δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης**

Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης σε απόσταση h από την επιφάνειά της δίνεται από τη σχέση $V=-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h}$.

- **Σχέση δυναμικού V με το δυναμικό V_0 στην επιφάνεια της Γης**

Στην επιφάνεια της Γης το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση $V_0=-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$. Επομένως:

$$\frac{V}{V_0}=\frac{-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h}}{-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}} \;\; ή \;\; \frac{V}{V_0}=\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma+h} \;\; ή \;\; V=V_0\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma+h}$$

- **Σχέση δυναμικού V με την πυκνότητα ρ της Γης**

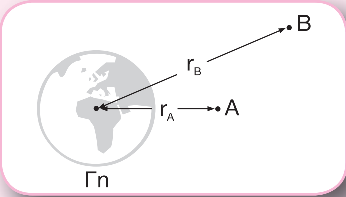
Από τις σχέσεις $M_\Gamma=\rho V_\Gamma$ και $V_\Gamma=\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3$, που συνδέουν τη μάζα της Γης με τον όγκο της V_Γ και την πυκνότητά της ρ, έχουμε:

$$V=-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h} \;\; ή \;\; V=-\frac{4}{3}G\frac{\rho\pi R_\Gamma^3}{R_\Gamma+h}$$

Για $h=0$ ισχύει: $V_0=-\frac{4}{3}G\rho\pi R_\Gamma^2$

- **Υπολογισμός του έργου του βάρους κατά τη μετακίνηση ενός σώματος μεταξύ δύο θέσεων**

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m μετακινείται από το σημείο Α στο σημείο Β του βαρυτικού πεδίου της Γης, τα οποία απέχουν αποστάσεις r_A και r_B από το κέντρο της αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση του σώματος μεταξύ των σημείων Α και Β υπολογίζεται από τη σχέση:



$$W_{A\to B}=m\left(V_A-V_B\right) \quad \text{ή} \quad W_{A\to B}=m\left(-G\frac{M_\Gamma}{r_A}+G\frac{M_\Gamma}{r_B}\right) \quad \text{ή} \quad W_{A\to B}=GM_\Gamma m\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \quad (1)$$

Από τη σχέση $g_0=G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$ έχουμε: $GM_\Gamma=g_0R_\Gamma^2 \quad (2)$

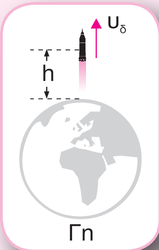
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $W_{A\to B}=g_0R_\Gamma^2 m\left(\dfrac{1}{r_B}-\dfrac{1}{r_A}\right)$

Όπως φαίνεται από την προηγούμενη σχέση, το έργο είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή μεταξύ των σημείων Α, Β και εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση.

Για τον υπολογισμό του έργου του βάρους για μετακίνηση ενός σώματος μεταξύ δύο θέσεων που βρίσκονται μακριά από το κέντρο της Γης και απέχουν μεγάλη απόσταση x δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση W_B = mgx, επειδή η ένταση g δεν έχει σταθερή τιμή.

- **Ταχύτητα διαφυγής από το βαρυτικό πεδίο της Γης**

Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος που εκτοξεύεται από σημείο που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon_\delta=\sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}$.



- **Σχέση ταχύτητας διαφυγής υ_δ και έντασης g_0**

  Από τη σχέση $g_0=G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$, που δίνει την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, έχουμε $GM_\Gamma=g_0R_\Gamma^2$. Επομένως:

  $$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}}$$

  Για $h=0$ ισχύει: $\upsilon_\delta=\sqrt{2g_0R_\Gamma}$

- **Σχέση ταχύτητας διαφυγής υ_δ και δυναμικού V_0**

  Από τη σχέση $V_0 = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$, που δίνει το δυναμικό στην επιφάνεια της Γης, έχουμε $GM_\Gamma = -V_0 R_\Gamma$. Άρα: $\upsilon_\delta = \sqrt{-\dfrac{2V_0 R_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$

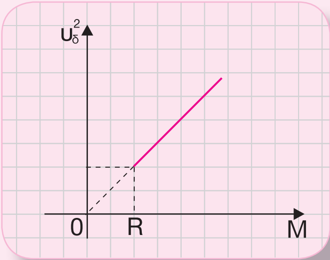
  Για $h = 0$ ισχύει: $\upsilon_\delta = \sqrt{-2V_0}$

  Για να διαφύγει ένα σώμα από το βαρυτικό πεδίο της Γης, πρέπει η μηχανική του ενέργεια να είναι μεγαλύτερη ή ίση με μηδέν. Εάν είναι αρνητική, το σώμα επιστρέφει στην επιφάνεια της Γης.

➢ **Ταχύτητα διαφυγής από το βαρυτικό πεδίο ενός ουράνιου σώματος**

Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος που εκτοξεύεται από σημείο που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια ενός ουράνιου σώματος μάζας M και ακτίνας R υπολογίζεται από τη σχέση:

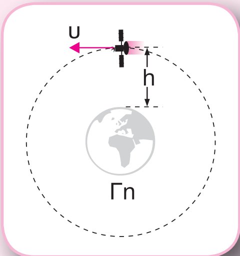
$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\delta^2 = \frac{2GM}{R+h}$$



Όπως προκύπτει από αυτή τη σχέση, το τετράγωνο της ταχύτητας διαφυγής $\left(\upsilon_\delta^2\right)$ είναι ανάλογο με τη μάζα (M) του ουράνιου σώματος, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος.

➢ **Περιφορά δορυφόρου γύρω από τη Γη**

Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος h πάνω από την επιφάνειά της.



- **Υπολογισμός ταχύτητας του δορυφόρου**

  Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$F = F_\kappa \;\text{ή}\; G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma + h} \;\text{ή}\; \upsilon = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \;\text{ή}\; \upsilon = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}}$$

  Όπως φαίνεται από την προηγούμενη σχέση, η ταχύτητα του δορυφόρου είναι **ανεξάρτητη** από τη μάζα του και εξαρτάται μόνο από την απόστασή του από την επιφάνεια της Γης. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι δορυφόροι που κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά έχουν ίδια ταχύτητα.

- **Κινητική ενέργεια του δορυφόρου**

  Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου υπολογίζεται από τη σχέση:

  $$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{ή} \quad K=\frac{1}{2}m\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}$$

- **Δυναμική ενέργεια του δορυφόρου**

  $$U=-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma+h} \quad \text{ή} \quad U=-\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}m$$

- **Μηχανική ενέργεια του δορυφόρου**

  $$E=K+U \quad \text{ή} \quad E=\frac{1}{2}m\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}-\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}m \quad \text{ή} \quad E=-\frac{1}{2}\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}m$$

Από τις σχέσεις που δίνουν την κινητική, τη δυναμική και τη μηχανική ενέργεια του δορυφόρου προκύπτουν:

$$\frac{K}{U}=-\frac{1}{2},\ \frac{U}{E}=2 \text{ και } \frac{K}{E}=-1$$

- **Περίοδος περιφοράς του δορυφόρου**

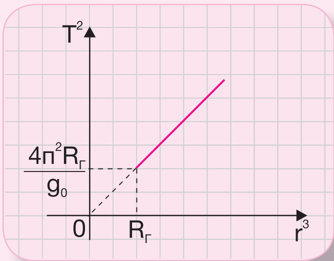
  $$T=\frac{2\pi(R_\Gamma+h)}{\upsilon} \quad \text{ή} \quad T=\frac{2\pi(R_\Gamma+h)}{\sqrt{\dfrac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma+h}}} \quad \text{ή} \quad T=\frac{2\pi(R_\Gamma+h)\sqrt{R_\Gamma+h}}{\sqrt{g_0R_\Gamma^2}} \quad \text{ή} \quad T=\frac{2\pi}{R_\Gamma}\sqrt{\frac{(R_\Gamma+h)^3}{g_0}}$$

  Όπως προκύπτει από την προηγούμενη σχέση, η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου είναι **ανεξάρτητη** από τη μάζα του. Το ίδιο ισχύει για τη συχνότητα και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου.

- **Διάγραμμα $T^2=f(r^3)$, όπου T η περίοδος περιφοράς και r η απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης**

  $$T=\frac{2\pi}{R_\Gamma}\sqrt{\frac{(R_\Gamma+h)^3}{g_0}} \quad \text{ή} \quad T^2=\frac{4\pi^2}{R_\Gamma^2}\frac{(R_\Gamma+h)^3}{g_0} \quad \text{ή} \quad T^2=\frac{4\pi^2}{g_0R_\Gamma^2}r^3$$

  Όπως φαίνεται από τη σχέση $T^2=\dfrac{4\pi^2}{g_0R_\Gamma^2}r^3$, το τετράγωνο της περιόδου της περιφοράς του δορυφόρου είναι ανάλογο με την τρίτη δύναμη της απόστασής του από το κέντρο της Γης. Αυτό αποτυπώνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



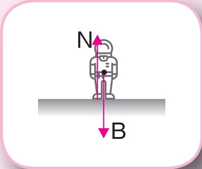
- **Μεταβολή της ενέργειας κατά τη μετακίνηση του δορυφόρου από τροχιά ακτίνας r_1 σε τροχιά ακτίνας r_2**

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad \text{ή} \quad \Delta E = -\frac{1}{2}\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_2}m + \frac{1}{2}\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_1}m \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{1}{2}g_0 R_\Gamma^2 m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

➢ **Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας**

Έστω ένας δορυφόρος που περιφέρεται γύρω από τη Γη. Ο δορυφόρος καθώς και όλα τα σώματα που βρίσκονται μέσα σ' αυτόν έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = g$, όπου g είναι η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης στο ύψος της τροχιάς του δορυφόρου.

Ένας αστροναύτης που βρίσκεται μέσα στον δορυφόρο δέχεται την έλξη B από τη Γη και τη δύναμη επαφής N από το δάπεδο.



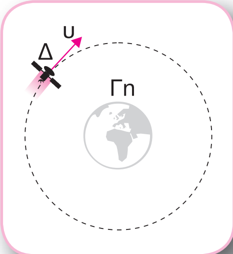
Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει:

$\Sigma F = m\alpha_\kappa$ ή $B - N = m\alpha_\kappa$ ή $mg - N = mg$ ή $N = 0$

Δηλαδή, το δάπεδο δεν ασκεί καμία δύναμη στον αστροναύτη και αυτό φαίνεται ως έλλειψη βαρύτητας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21.6) **Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση $h = 35.600\text{km}$ από την επιφάνειά της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται η μάζα της Γης $M_\Gamma = 5{,}98 \cdot 10^{24}\text{kg}$, η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400\text{km}$ και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.**



α) Να υπολογίσετε το μέτρο υ της ταχύτητας περιφοράς του δορυφόρου.

β) Να υπολογίσετε την περίοδο T περιφοράς του δορυφόρου.

γ) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του δορυφόρου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$, εάν η μάζα του δορυφόρου είναι $m = 10^3\text{kg}$.

δ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται πώς μεταβάλλεται το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του δορυφόρου $\left(T^2\right)$ σε συνάρτηση με την τρίτη δύναμη της απόστασής του $\left(r^3\right)$ από το κέντρο της Γης για τιμές της απόστασης από $r = R_\Gamma$ έως $r = 2R_\Gamma$. Δίνεται: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$F = F_{\kappa} \quad ή \quad G\frac{M_{\Gamma} m}{(R_{\Gamma}+h)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_{\Gamma}+h} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}+h}}$$

ή $\upsilon = 3{,}0816 \cdot 10^3 \, m/s$

Η ταχύτητα περιφοράς ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη είναι ανεξάρτητη της μάζας του δορυφόρου και μειώνεται όταν αυξάνεται η απόστασή του από το κέντρο της Γης.

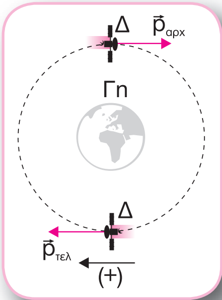
β) Από τη σχέση $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$, που συνδέει την ταχύτητα με την περίοδο περιφοράς σε μία ομαλή κυκλική κίνηση, έχουμε:

$$\upsilon = \frac{2\pi(R_{\Gamma}+h)}{T} \quad ή \quad T = \frac{2\pi(R_{\Gamma}+h)}{\upsilon} \quad ή$$

$T = 85{,}5919 \cdot 10^3 \, s$

Η περίοδος περιφοράς ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη είναι ανεξάρτητη της μάζας του δορυφόρου και αυξάνεται όταν αυξάνεται η απόστασή του από το κέντρο της Γης.

γ) Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$ ο δορυφόρος έχει εκτελέσει μισή περιφορά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επομένως:



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \quad ή \quad \Delta p = m\upsilon - (-m\upsilon) \quad ή \quad \Delta p = 2m\upsilon \quad ή$$

$\Delta p = 6{,}1632 \cdot 10^6 \, kg \cdot m/s$

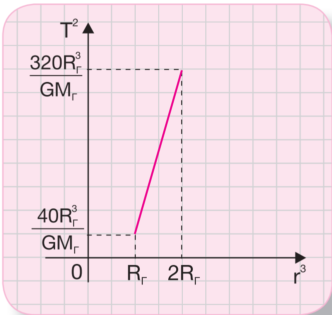
δ) Από τις σχέσεις $T = \frac{2\pi(R_{\Gamma}+h)}{\upsilon}$ και $\upsilon = \sqrt{G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}+h}}$ και θέτοντας $r = R_{\Gamma}+h$, έχουμε:

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} \quad ή \quad T = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M_{\Gamma}}{r}}} \quad ή \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{G\frac{M_{\Gamma}}{r}} \quad ή \quad T^2 = \frac{40 r^3}{GM_{\Gamma}} \quad ή \quad T^2 = \frac{40}{GM_{\Gamma}} r^3 \quad (1)$$

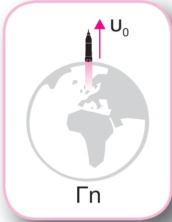
Όπως προκύπτει από τη σχέση (1), τα μεγέθη T^2 και r^3 είναι ανάλογα, άρα η γραφική παράσταση $T^2 = f(r^3)$ είναι ευθεία.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για $r = R_{\Gamma}$ έχουμε $T^2 = \frac{40R_{\Gamma}^3}{GM_{\Gamma}}$ και για $r = 2R_{\Gamma}$ έχουμε $T^2 = \frac{320R_{\Gamma}^3}{GM_{\Gamma}}$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα αποτυπώνονται στο διάγραμμα $T^2 = f(r^3)$.



21.7) Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{g_0 R_\Gamma}$. Θεωρούνται γνωστές η ακτίνα R_Γ της Γης και η ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της.



α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση r από το κέντρο της Γης στην οποία θα φτάσει το σώμα.

β) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα $K = f(r)$, $U = f(r)$ και $E_{\mu\eta\chi} = f(r)$ στα οποία φαίνεται πώς μεταβάλλονται σε συνάρτηση με την απόσταση του σώματος από το κέντρο της Γης η κινητική του ενέργεια, η δυναμική του ενέργεια και η μηχανική του ενέργεια αντίστοιχα κατά την κίνησή του από την επιφάνεια της Γης μέχρι να φτάσει στο ανώτερο ύψος.

Λύση

α) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$. Επειδή ισχύει $GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2$, προκύπτει: $\upsilon_\delta = \sqrt{2g_0 R_\Gamma}$

Επειδή $\upsilon_\delta > \upsilon_0$, το σώμα δε διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του σώματος, έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \quad \acute{\eta} \quad 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\varepsilon\lambda}\right) \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi} \quad \acute{\eta}$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_0^2 = -GM_\Gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_\Gamma}\right) \quad \acute{\eta} \quad g_0 R_\Gamma = -2g_0 R_\Gamma^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_\Gamma}\right) \quad \acute{\eta} \quad 1 = -2R_\Gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_\Gamma}\right) \quad \acute{\eta}$$

$$1 = -\frac{2R_\Gamma}{r} + 2 \quad \acute{\eta} \quad r = 2R_\Gamma$$

β) Η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U = -G\frac{M_\Gamma m}{r} \quad \acute{\eta} \quad U = -g_0 R_\Gamma^2 m \cdot \frac{1}{r}$$

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη σχέση, η δυναμική ενέργεια είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης r του σώματος από το κέντρο της Γης.

Για $r_1 = R_\Gamma$ έχουμε: $U_1 = -g_0 R_\Gamma m$

Για $r_2 = 2R_\Gamma$ έχουμε: $U_2 = -\dfrac{1}{2} g_0 R_\Gamma m$

Η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση:

$$E_{μηχ} = (K+U)_{αρχ} \quad ή \quad E_{μηχ} = \frac{1}{2}mυ_0^2 - G\frac{M_Γ m}{R_Γ} \quad ή$$

$$E_{μηχ} = \frac{1}{2}mg_0R_Γ - mg_0R_Γ \quad ή \quad E_{μηχ} = -\frac{1}{2}mg_0R_Γ$$

Η κινητική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

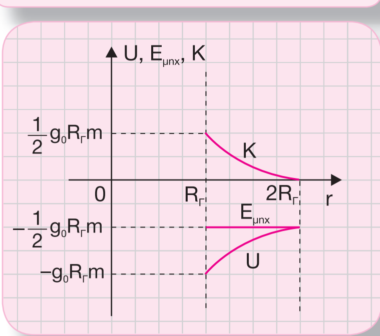
$$K = E_{μηχ} - U \quad ή \quad K = -\frac{1}{2}mg_0R_Γ + g_0R_Γ^2 m \cdot \frac{1}{r}$$

Για $r_1 = R_Γ$ έχουμε: $K_1 = \frac{1}{2}mg_0R_Γ$

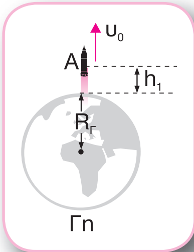
Για $r_2 = 2R_Γ$ έχουμε: $K_2 = 0$

Τα παραπάνω συμπεράσματα αποτυπώνονται στο διπλανό διάγραμμα.

Όταν η μηχανική ενέργεια ενός σώματος που εκτοξεύεται από ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, το σώμα διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο. Εάν η μηχανική ενέργεια είναι αρνητική, το σώμα επιστρέφει στην επιφάνεια της Γης.



21.8) Από ένα σημείο Α του βαρυτικού πεδίου της Γης το οποίο βρίσκεται σε ύψος $h_1 = \frac{R_Γ}{2}$ πάνω από την επιφάνειά της εκτοξεύεται κατακόρυφα προς το διάστημα σώμα μάζας $m = \frac{3 \cdot 10^3}{4}$kg με ταχύτητα μέτρου $υ_0 = 16\sqrt{3} \cdot 10^3$ m / s. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_Γ = 6.400$km και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10$m / s^2.



α) Να υπολογίσετε τη μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο Α.

β) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος σε ύψος $h_2 = R_Γ$ από την επιφάνεια της Γης.

γ) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα διαφύγει στο διάστημα και να βρείτε την ταχύτητά του, όταν βρεθεί εκτός πεδίου βαρύτητας της Γης.

Λύση

α) Η μηχανική ενέργεια στο σημείο Α υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{μηχ} = (K+U)_1 \quad ή \quad E_{μηχ} = \frac{1}{2}mυ_0^2 - G\frac{M_Γ m}{R_Γ + h_1} \quad ή \quad E_{μηχ} = \frac{1}{2}mυ_0^2 - G\frac{M_Γ m}{\frac{3}{2}R_Γ} \quad ή$$

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{2}{3}mg_0R_\Gamma \quad \text{ή} \quad E_{\mu\eta\chi} = 2{,}56\cdot 10^{11}\,J$$

β) Η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή. Στο ύψος $h_2 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης ισχύει:

$$E_{\mu\eta\chi} = (K+U)_2 \quad \text{ή} \quad K_2 = E_{\mu\eta\chi} - U_2 \quad \text{ή}$$

$$K_2 = E_{\mu\eta\chi} + G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h_2} \quad \text{ή}$$

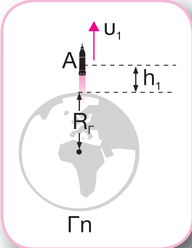
$$K_2 = E_{\mu\eta\chi} + \frac{g_0R_\Gamma m}{2} \quad \text{ή} \quad K_2 = 2{,}8\cdot 10^{11}\,J$$

Επειδή το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι συντηρητικό, η μηχανική ενέργεια διατηρείται εφόσον κατά την κίνηση του σώματος δεν υπάρχουν τριβές.

γ) Επειδή η μηχανική ενέργεια είναι θετική, το σώμα θα διαφύγει στο διάστημα. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος στο άπειρο, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου Α και ενός σημείου εκτός πεδίου βαρύτητας της Γης.

$$E_{\mu\eta\chi} = K_\infty + U_\infty \quad \text{ή} \quad E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 + 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_\infty = \sqrt{\frac{2E_{\mu\eta\chi}}{m}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\infty = \frac{32\sqrt{6}\cdot 10^3}{3}\,m/s$$

21.9) Α. Ένα διαστημικό όχημα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα από ύψος $h_1 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}}$. Να υπολογίσετε:



α$_1$) την ταχύτητα του οχήματος σε ύψος $h_2 = 2R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης,

α$_2$) τον λόγο $\frac{g_1}{g_2}$ των μέτρων των εντάσεων g_1 και g_2 του βαρυτικού πεδίου της Γης στα ύψη h_1 και h_2 αντίστοιχα.

Β. Με τη βοήθεια βοηθητικών πυραύλων, όταν το διαστημικό όχημα φτάνει στο ύψος h_2, μπαίνει σε κυκλική τροχιά μετατρεπόμενο σε τεχνητό δορυφόρο της Γης. Να υπολογίσετε:

β$_1$) την πρόσθετη ταχύτητα υ' που πρέπει να προσδώσουν στο όχημα οι βοηθητικοί πύραυλοι για να το θέσουν σε κυκλική τροχιά,

β$_2$) την περίοδο περιφοράς Τ του οχήματος και το μέτρο της μεταβολής της κεντρομόλου επιτάχυνσής του σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{4}$.

Λύση

$α_1$) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας μεταξύ των υψών h_1 και h_2, έχουμε:

$$K_2 - K_1 = W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = m\left(V_1 - V_2\right) \quad ή \quad \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2\left(V_1 - V_2\right) \quad ή$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2\left(-GM_\Gamma\frac{1}{2R_\Gamma} + GM_\Gamma\frac{1}{3R_\Gamma}\right) \quad ή \quad \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2\left(-g_0R_\Gamma^2\frac{1}{2R_\Gamma} + g_0R_\Gamma^2\frac{1}{3R_\Gamma}\right) \quad ή$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - \frac{1}{3}g_0R_\Gamma \quad ή \quad \upsilon_2^2 = \frac{g_0R_\Gamma}{2} - \frac{g_0R_\Gamma}{3} \quad ή \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{6}}$$

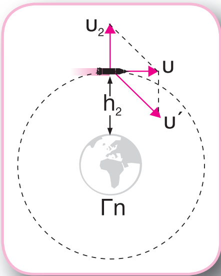
$α_2$) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης σε ύψος h πάνω από την επιφάνειά της έχει μέτρο που δίνεται από τη σχέση $g = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h\right)^2}$. Επομένως:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2}}{G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h_2\right)^2}} \quad ή \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{G\frac{M_\Gamma}{\left(2R_\Gamma\right)^2}}{G\frac{M_\Gamma}{\left(3R_\Gamma\right)^2}} \quad ή \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{9}{4}$$

$β_1$) Όταν το όχημα κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, η βαρυτική έλξη από τη Γη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$F = F_κ \quad ή \quad G\frac{M_\Gamma m}{\left(R_\Gamma + h_2\right)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma + h_2} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h_2}} \quad ή$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma^2}{3R_\Gamma}} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{3}}$$



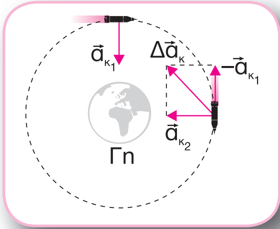
Όπως φαίνεται στο σχήμα, το μέτρο της επιπλέον ταχύτητας υ' που πρέπει να προσδώσουν στο όχημα οι βοηθητικοί πύραυλοι υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon'^2 = \upsilon^2 + \upsilon_2^2 \quad ή \quad \upsilon'^2 = \frac{g_0R_\Gamma}{3} + \frac{g_0R_\Gamma}{6} \quad ή \quad \upsilon' = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}}$$

$β_2$) Η ταχύτητα συνδέεται με την περίοδο περιφοράς σε μία ομαλή κυκλική κίνηση με τη σχέση $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$. Για $r = R_\Gamma + h_2$ έχουμε:

$$\upsilon = \frac{6\pi R_\Gamma}{T} \quad ή \quad T = \frac{6\pi R_\Gamma}{\upsilon} \quad ή \quad T = \frac{6\pi R_\Gamma}{\sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{3}}} \quad ή \quad T = 6\pi\sqrt{\frac{3R_\Gamma}{g_0}}$$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{4}$ το όχημα εκτελεί το $\frac{1}{4}$ μίας περιφοράς γύρω από τη Γη. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η μεταβολή της κεντρομόλου επιτάχυνσής του σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{4}$ υπολογίζεται από τη σχέση:



$$\Delta\vec{\alpha}_\kappa = \vec{\alpha}_{\kappa_2} - \vec{\alpha}_{\kappa_1} \quad ή \quad \Delta\vec{\alpha}_\kappa = \vec{\alpha}_{\kappa_2} + \left(-\vec{\alpha}_{\kappa_1}\right) \quad ή$$

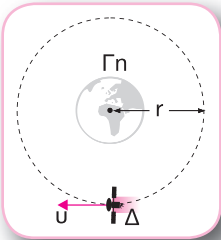
$$\Delta\alpha_\kappa = \sqrt{\alpha_{\kappa_1}^2 + \alpha_{\kappa_2}^2} \quad ή \quad \Delta\alpha_\kappa = \sqrt{2\alpha_\kappa^2} \quad ή$$

$$\Delta\alpha_\kappa = \sqrt{2g_2^2} \quad ή \quad \Delta\alpha_\kappa = g_2\sqrt{2} \quad ή \quad \Delta\alpha_\kappa = \frac{GM_\Gamma}{9R_\Gamma^2}\sqrt{2}$$

$$ή \quad \Delta\alpha_\kappa = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{9R_\Gamma^2}\sqrt{2} \quad ή \quad \Delta\alpha_\kappa = \frac{g_0\sqrt{2}}{9}$$

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης μεταβάλλεται, ενώ το μέτρο της μένει σταθερό.

21.10) Ένας δορυφόρος Δ μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση r από το κέντρο της με ταχύτητα υ. Με εσωτερικό μηχανισμό προκαλείται διάσπαση του δορυφόρου σε δύο τμήματα Δ_1 και Δ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το τμήμα Δ_1 κινείται στην ίδια τροχιά αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική. Το τμήμα Δ_2 έχει τετραπλάσια ταχύτητα από την ταχύτητα διαφυγής του από αυτό το σημείο. Να υπολογίσετε:



α) τα μέτρα των ταχυτήτων των τμημάτων Δ_1 και Δ_2 αμέσως μετά τη διάσπαση σε συνάρτηση με την ταχύτητα υ,

β) τις μάζες m_1 και m_2 σε συνάρτηση με τη μάζα m,

γ) τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια της διάσπασης,

δ) την περίοδο περιφοράς T_1 του τμήματος Δ_1 σε συνάρτηση με την περίοδο περιφοράς Τ του δορυφόρου Δ γύρω από τη Γη.

Λύση

α) Όταν ο δορυφόρος Δ κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, η βαρυτική έλξη από τη Γη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$F = F_\kappa \quad ή \quad G\frac{M_\Gamma m}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{r}} \quad (1)$$

Ομοίως για το τμήμα Δ_1 ισχύει:

$$F_1 = F_{\kappa_1} \quad \text{ή} \quad G\frac{M_\Gamma m_1}{r^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{r} \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{r}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\upsilon_1 = \upsilon$

Η ταχύτητα του τμήματος Δ_2 είναι:

$$\upsilon_2 = 4\upsilon_\delta \quad \text{ή} \quad \upsilon_2 = 4\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{r}} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει: $\upsilon_2 = 4\sqrt{2}\upsilon$

β) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για τον δορυφόρο Δ και τα τμήματα Δ_1, Δ_2 κατά τη διάρκεια της διάσπασης, έχουμε:

> Κατά τη διάρκεια διάσπασης η μάζα του συστήματος διατηρείται.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad m\upsilon = -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \quad \text{ή}$$

$$m\upsilon = -(m - m_2)\upsilon + 4\sqrt{2}m_2\upsilon \quad \text{ή} \quad m = -(m - m_2) + 4\sqrt{2}m_2 \quad \text{ή} \quad m_2 = \frac{2m}{1 + 4\sqrt{2}}$$

$$m_1 + m_2 = m \quad \text{ή} \quad m_1 = m - \frac{2m}{1+4\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad m_1 = \frac{(4\sqrt{2}-1)m}{4\sqrt{2}+1} \quad \text{ή} \quad m_1 = \frac{(4\sqrt{2}-1)^2 m}{31}$$

γ) Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της διάσπασης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = E_{\mu\eta\chi_{\tau\varepsilon\lambda}} - E_{\mu\eta\chi_{\alpha\rho\chi}} \quad \text{ή} \quad \Delta E_{\mu\eta\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} - (K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi}) \quad (4)$$

Η δυναμική ενέργεια πριν από τη διάσπαση είναι: $U_{\alpha\rho\chi} = -G\frac{M_\Gamma m}{r}$

Η δυναμική ενέργεια αμέσως μετά τη διάσπαση είναι:

$$U_{\tau\varepsilon\lambda} = -G\frac{M_\Gamma m_1}{r} - G\frac{M_\Gamma m_2}{r} = -G\frac{M_\Gamma (m_1 + m_2)}{r}$$

Επειδή $m = m_1 + m_2$, έχουμε: $U_{\tau\varepsilon\lambda} = -G\frac{M_\Gamma m}{r}$ ή $U_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad (5)$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + 32\cdot\frac{1}{2}m_2\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}(m_1 + 32m_2 - m)\upsilon^2$$

> Κατά τη διάρκεια διάσπασης ενός σώματος η μηχανική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται, επειδή στο σώμα προστίθεται ένα μέρος της ενέργειας που χρησιμοποιήθηκε για τη διάσπαση.

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + 31m_2 - m)\upsilon^2 \quad \text{ή} \quad \Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2}\cdot 31m_2\upsilon^2 \quad \text{ή} \quad \Delta E_{\mu\eta\chi} = \frac{31m\upsilon^2}{1+4\sqrt{2}}$$

δ) Η ταχύτητα συνδέεται με την περίοδο περιφοράς σε μία ομαλή κυκλική κίνηση με τη σχέση $T = \frac{2\pi r}{\upsilon}$. Επειδή $\upsilon_1 = \upsilon$, προκύπτει: $T_1 = T$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

21.11) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα στα οποία φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ένταση και το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της Γης.

21.12) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει την ένταση g του βαρυτικού πεδίου της Γης σε απόσταση $r = 2R_\Gamma$ από το κέντρο της με την ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης.

21.13) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει την απόλυτη τιμή $|V|$ του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου της Γης σε απόσταση $r = 3R_\Gamma$ από το κέντρο της με την απόλυτη τιμή $|V_0|$ του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης.

21.14) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος, εάν το σημείο εκτόξευσής του βρίσκεται σε ύψος $r = 3R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, σε συνάρτηση με την ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της.

21.15) Τι γνωρίζετε για την ακτίνα Schwarzschild; Να γράψετε τη σχέση με την οποία την υπολογίζουμε.

21.16) Πώς γίνεται αντιληπτή μία μαύρη τρύπα;

21.17) Τι ακτίνες πρέπει να έχουν ο Ήλιος και η Γη ώστε να έχουν πυκνότητα παρόμοια με την πυκνότητα την οποία έχει η ύλη που περιέχεται σε μία μαύρη τρύπα;

21.18) Να εξηγήσετε γιατί οι τεχνητοί δορυφόροι που περιφέρονται σχετικά κοντά στη Γη παραμένουν στην τροχιά τους για λίγο χρόνο, ενώ η Σελήνη κινείται πάντα στην ίδια τροχιά.

21.19) Ένας δορυφόρος κινείται σε τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος στο οποίο η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης έχει μέτρο $g = \frac{g_0}{4}$, όπου g_0 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της. Να υπολογίσετε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του δορυφόρου.

21.20) Δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 περιφέρονται γύρω από τη Γη με ταχύτητες με μέτρα υ_1 και $\upsilon_2 > \upsilon_1$ αντίστοιχα. Να σχολιάσετε την άποψη ότι οι δύο δορυφόροι δεν είναι δυνατόν να συγκρουστούν.

21.21) Να σχολιάσετε την πρόταση: «Ένα διαστημόπλοιο που ξεκινά από τη Γη για να φτάσει στη Σελήνη πρέπει να εκτοξευθεί με ταχύτητα τουλάχιστον $11{,}2\,km/s$».

21.22) Ένα σώμα μετακινείται από την επιφάνεια της Γης στην επιφάνεια της Σελήνης. Να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η συνισταμένη βαρυτική δύναμη που δέχεται.

21.23) Να εξηγήσετε γιατί, ενώ η δύναμη που ασκεί ο Ήλιος στη Σελήνη είναι περίπου διπλάσια από τη δύναμη της παγκόσμιας έλξης που ασκεί η Γη στη Σελήνη, η Σελήνη δε διαφεύγει από τη Γη.

21.24) Να εξηγήσετε εάν μπορεί ένας δορυφόρος που εκτοξεύεται από ένα κανόνι να τεθεί σε τροχιά γύρω από τη Γη.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

21.25) Η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη σε ένα σώμα που βρίσκεται στο πεδίο βαρύτητας της Γης:
α) δε μηδενίζεται ποτέ.
β) είναι σταθερή, ανεξάρτητα από την απόσταση του σώματος από το κέντρο της Γης.
γ) δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος.

21.26) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης, με μάζα M_Γ και ακτίνα R_Γ, σε ύψος h από την επιφάνειά της δίνεται από τη σχέση:

α) $g = G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$ β) $g = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^3}$ γ) $g = G\dfrac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$

21.27) Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης, με μάζα M_Γ και ακτίνα R_Γ, σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνειά της δίνεται από τη σχέση:

α) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}$ β) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$ γ) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}$

21.28) Στην επιφάνεια της Σελήνης η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης είναι μικρότερη από την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνεια της Γης:

α) τρεις φορές.

β) τέσσερις φορές.

γ) έξι φορές.

21.29) Η ταχύτητα διαφυγής με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης υπολογίζεται από τη σχέση:

α) $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}}$ β) $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$ γ) $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$

21.30) Η ταχύτητα διαφυγής με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης είναι:

α) $\upsilon_\delta = 40.320 m/h$ β) $\upsilon_\delta = 11{,}2 m/s$ γ) $\upsilon_\delta = 11{,}2 km/s$

21.31) Η ακτίνα Schwarzschild δίνεται από τη σχέση:

α) $R_S = \dfrac{2GM}{c^2}$ β) $R_S = \dfrac{GM}{c^2}$ γ) $R_S = \dfrac{2GM}{c}$

21.32) Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

α) Ένα ουράνιο σώμα με ακτίνα μικρότερη της ακτίνας Schwarzschild δεν επιτρέπει στο φως να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητάς του.

β) Η σχέση που δίνει την ακτίνα Schwarzschild παράγεται λαμβάνοντας υπόψη τις διορθώσεις που επέφερε η θεωρία της σχετικότητας στην κλασική μηχανική.

γ) Για να περιπέσει σε κατάσταση μαύρης τρύπας ο Ήλιος, πρέπει να συμπιεσθεί σε μια σφαίρα ακτίνας 3km.

21.33) Ποιες προτάσεις είναι σωστές;

α) Για να περιπέσει σε κατάσταση μαύρης τρύπας η Γη, πρέπει να συμπιεσθεί σε μια σφαίρα ακτίνας 9cm.

β) Σε περιοχές του σύμπαντος όπου ανιχνεύουμε ασυνήθιστα μεγάλης έντασης εκπομπή ακτινοβολίας Χ υποπτευόμαστε την ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας.

γ) Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια του Ήλιου είναι $618km / s$.

21.34) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης:

α) είναι ανάλογη με τη μάζα της Γης.

β) είναι αντιστρόφως ανάλογη με την ακτίνα της Γης.

γ) δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος που εκτοξεύεται.

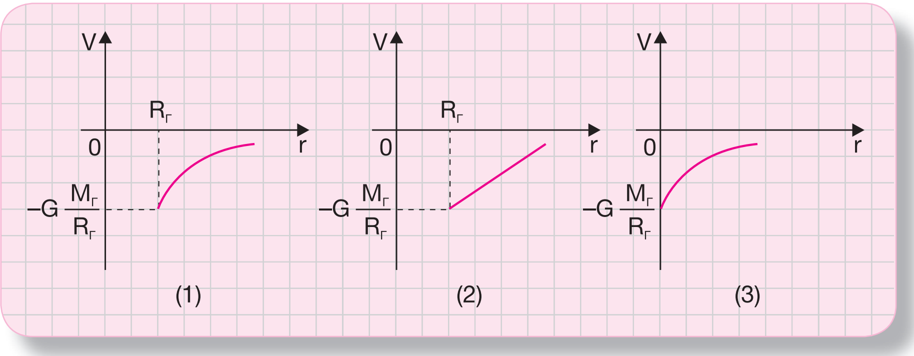
21.35) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος που εκτοξεύεται από ύψος h από την επιφάνεια της Γης:

α) δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας του σώματος.

β) είναι ανάλογη του ύψους h.

γ) είναι αντιστρόφως ανάλογη του ύψους h.

21.36) Το διάγραμμα που δείχνει πώς μεταβάλλεται το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας της Γης είναι το:



α) (1) β) (2) γ) (3)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

21.37) Η βαρυτική έλξη της Γης σε ένα μήλο μάζας m που βρίσκεται στην επιφάνειά της έχει μέτρο $F = 1N$. Όταν το μήλο βρίσκεται σε απόσταση $2R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, το μέτρο F' της βαρυτικής έλξης της Γης είναι:

α) $F' = 0,5N$ β) $F' = 0,25N$ γ) $F' = 0,2N$

21.38) Ένας άνθρωπος μάζας m επάνω στην επιφάνεια της Γης έχει βάρος Β. Εάν υποθέσουμε ότι, χωρίς να μεταβληθεί η μάζα της Γης, αυξάνεται η ακτίνα της κατά 20%, το βάρος B' του ανθρώπου είναι:

α) $B' = \frac{4}{5}B$ β) $B' = \frac{5}{6}B$ γ) $B' = \frac{25}{36}B$

21.39) Ένας άνθρωπος μάζας m επάνω στην επιφάνεια της Γης έχει βάρος Β. Ο όγκος της Γης δίνεται από τη σχέση $V = \frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3$. Εάν υποθέσουμε ότι, χωρίς να μεταβληθεί η μέση πυκνότητα της Γης, μειώνεται η ακτίνα της κατά 10%, το βάρος B' του ανθρώπου είναι:

α) $B' = \frac{9}{10}B$ β) $B' = \frac{1}{10}B$ γ) $B' = \frac{1}{2}B$

21.40) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνεια της Γης είναι g_0 και σε ύψος $h = 2R_\Gamma$, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, είναι g. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $g = \frac{g_0}{9}$ β) $g = \frac{g_0}{3}$ γ) $g = \frac{g_0}{2}$

21.41) Η μέση απόσταση μεταξύ της επιφάνειας της Σελήνης και του κέντρου της Γης είναι $d = 60R_\Gamma$, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης. Οι εντάσεις του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνεια της Γης και στην επιφάνεια της Σελήνης, g_0 και g αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση:

α) $g = \frac{g_0}{60}$ β) $g = \frac{g_0}{3.600}$ γ) $g = \frac{g_0}{1.800}$

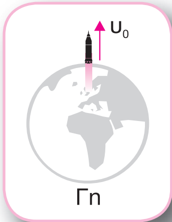
21.42) Η απόσταση μεταξύ των κέντρων της Γης και της Σελήνης είναι d. Οι μάζες M_Γ, M_Σ της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} = 81$. Στο σημείο Α του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης τα μέτρα των εντάσεων των βαρυτικών πεδίων της Γης και της Σελήνης, g_Γ και g_Σ αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση $g_\Gamma = 4g_\Sigma$. Το σημείο Α απέχει από το κέντρο της Γης απόσταση:

α) $d' = \dfrac{9d}{11}$ β) $d' = \dfrac{3d}{11}$ γ) $d' = \dfrac{6d}{11}$

21.43) Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της είναι V_0 και σε ύψος $h = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, είναι V. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $V = \dfrac{V_0}{8}$ β) $V = \dfrac{V_0}{2}$ γ) $V = \dfrac{V_0}{4}$

21.44) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{G\dfrac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}}$, όπου M_Γ και R_Γ είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Το μέγιστο ύψος h_{max} πάνω από την επιφάνεια της Γης που θα φτάσει το σώμα είναι:



α) $h_{max} = \dfrac{R_\Gamma}{7}$ β) $h_{max} = \dfrac{R_\Gamma}{5}$ γ) $h_{max} = \dfrac{R_\Gamma}{3}$

21.45) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα διαφυγής υ_δ. Η μάζα και η ακτίνα της Γης είναι M_Γ και R_Γ αντίστοιχα. Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης στο σημείο όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon = \dfrac{\upsilon_\delta}{4}$ είναι:

α) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{17R_\Gamma}$ β) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{16R_\Gamma}$ γ) $V = -G\dfrac{M_\Gamma}{15R_\Gamma}$

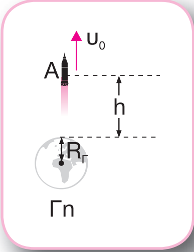
21.46) Η ταχύτητα διαφυγής υ_δ ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης, η ακτίνα R_Γ της Γης και η ένταση g_0 του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της συνδέονται με τη σχέση:

α) $\upsilon_\delta = \sqrt{2g_0R_\Gamma}$ β) $\upsilon_\delta = \sqrt{g_0R_\Gamma}$ γ) $\upsilon_\delta = 2\sqrt{g_0R_\Gamma}$

21.47) Η ταχύτητα διαφυγής υ_δ ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης και το δυναμικό V_0 του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της συνδέονται με τη σχέση:

α) $\upsilon_\delta = \sqrt{2V_0}$ β) $\upsilon_\delta = \sqrt{-V_0}$ γ) $\upsilon_\delta = \sqrt{-2V_0}$

21.48) Από ύψος $h = 3R_Γ$ από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα μέτρου $υ_0 = \sqrt{G\dfrac{M_Γ}{4R_Γ}}$, όπου $M_Γ$ και $R_Γ$ είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Στο σημείο όπου το σώμα σταματά στιγμιαία η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι:

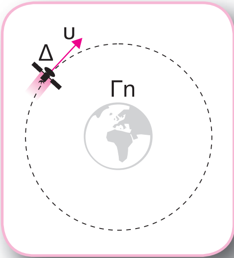


α) $g = G\dfrac{M_Γ}{32R_Γ^2}$ β) $g = G\dfrac{M_Γ}{64R_Γ^2}$ γ) $g = G\dfrac{M_Γ}{8R_Γ^2}$

21.49) Σε ένα σημείο Β το οποίο απέχει απόσταση h_B από την επιφάνεια της Γης το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας είναι $V_B = -G\dfrac{M_Γ}{4R_Γ}$, όπου $M_Γ$ και $R_Γ$ είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Εάν g_0 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από το σημείο Β δίνεται από τη σχέση:

α) $υ_δ = \dfrac{\sqrt{2g_0R_Γ}}{2}$ β) $υ_δ = \dfrac{\sqrt{g_0R_Γ}}{2}$ γ) $υ_δ = \sqrt{2g_0R_Γ}$

21.50) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h = 9R_Γ$ πάνω από την επιφάνειά της, όπου $R_Γ$ είναι η ακτίνα της Γης. Εάν g_0 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, η κεντρομόλος επιτάχυνση του δορυφόρου στο ύψος h δίνεται από τη σχέση:

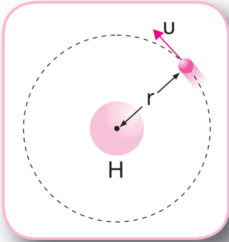


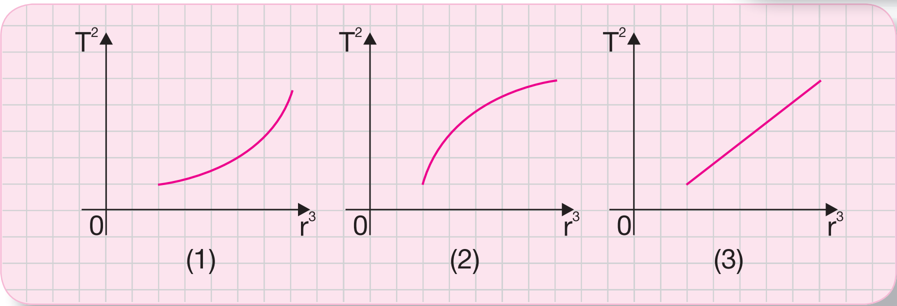
α) $α_κ = \dfrac{g_0}{50}$ β) $α_κ = \dfrac{g_0}{10}$ γ) $α_κ = \dfrac{g_0}{100}$

21.51) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος h πάνω από την επιφάνειά της με ταχύτητα μέτρου $υ$. Η ταχύτητα διαφυγής του δορυφόρου από αυτό το ύψος είναι $υ_δ$. Ποια σχέση είναι σωστή;

α) $\dfrac{υ}{υ_δ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\dfrac{υ}{υ_δ} = \sqrt{2}$ γ) $\dfrac{υ}{υ_δ} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

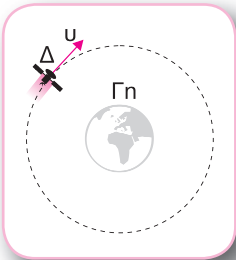
21.52) Ένας πλανήτης κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν T και r είναι η περίοδος περιφοράς του πλανήτη και η ακτίνα της τροχιάς του αντίστοιχα, ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα που δείχνουν πώς μεταβάλλεται το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς $\left(T^2\right)$ σε συνάρτηση με την τρίτη δύναμη της απόστασης $\left(r^3\right)$ είναι σωστό;





α) (1) β) (2) γ) (3)

21.53) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση r από το κέντρο της. Ο δορυφόρος βρίσκεται συνεχώς πάνω από τον ίδιο τόπο του Ισημερινού. Γνωρίζουμε ότι g_0 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, R_Γ η ακτίνα της Γης και T_Γ η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της. Ποια σχέση είναι σωστή;

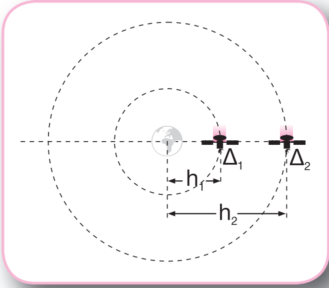


α) $r = \sqrt{\dfrac{R_\Gamma T_\Gamma^2 g_0}{4\pi^2}}$ β) $r = \sqrt[3]{\dfrac{R_\Gamma^2 T_\Gamma^2 g_0}{4\pi^2}}$ γ) $r = \sqrt[3]{\dfrac{R_\Gamma^2 T_\Gamma g_0}{4\pi^2}}$

21.54) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r_1 = 2R_\Gamma$ γύρω από τη Γη, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης. Η ενέργεια που απαιτείται ώστε ο δορυφόρος να μεταφερθεί και να περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r_2 = 6R_\Gamma$ γύρω από τη Γη είναι E. Εάν g_0 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της, ποια σχέση είναι σωστή;

α) $E = \dfrac{mg_0R_\Gamma}{3}$ β) $E = \dfrac{mg_0R_\Gamma}{6}$ γ) $E = \dfrac{mg_0R_\Gamma}{12}$

21.55) Δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 περιφέρονται γύρω από τη Γη σε ύψη $h_1 = 3R_\Gamma$ και $h_2 = 8R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνειά της, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, με περιόδους περιφοράς T_1 και T_2 αντίστοιχα. Ποια σχέση είναι σωστή;



α) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{8}{27}$ β) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{4}{27}$ γ) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{8}{13}$

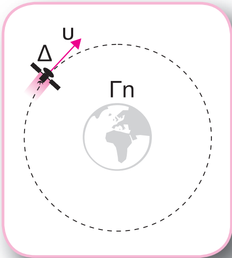
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21.56) Η βαρυτική έλξη που δέχεται ένας άνθρωπος μάζας m από τη Γη, που έχει μάζα M_Γ και ακτίνα R_Γ, έχει μέτρο $F_0 = 810N$ στην επιφάνεια της θάλασσας. Να βρείτε το μέτρο της βαρυτικής έλξης που δέχεται ο άνθρωπος:

α) σε απόσταση $3R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης,

β) σε ύψος $3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης.

21.57) Ένας δορυφόρος περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h_1 = 9R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνειά της. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$. Να υπολογίσετε:



α) την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h_1,

β) το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h_1,

γ) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μέτρου της έντασης του βαρυτικού πεδίου της Γης, εάν ο δορυφόρος περιφέρεται σε ύψος $h_2 = 4R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης.

21.58) Ένα σώμα Σ μάζας m βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι $g = 2,5m/s^2$. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$. Να υπολογίσετε:

α) το ύψος h,

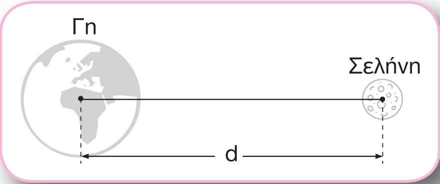
β) το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h, γ) το έργο της δύναμης του βαρυτικού πεδίου της Γης για τη μετακίνηση του σώματος Σ από το ύψος h στην επιφάνεια της Γης, εάν γνωρίζουμε ότι $m = 10^3 kg$.

21.59) Σε ύψος $h_1 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης η ένταση και το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι g_1 και V_1 αντίστοιχα. Οι μάζες M_Γ, M_Σ και οι ακτίνες R_Γ, R_Σ της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} = 81$ και $\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma} = \frac{11}{3}$.

α) Να υπολογίσετε την ένταση g_2 και το δυναμικό V_2 του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης σε ύψος $h_2 = 2R_\Sigma$ πάνω από την επιφάνειά της.

β) Εάν στο ύψος h_2 πάνω από την επιφάνεια της Σελήνης ένα σώμα έχει βάρος B_Σ, να υπολογίσετε το βάρος του B_Γ στο ύψος h_1 πάνω από την επιφάνεια της Γης.

21.60) Η απόσταση των κέντρων της Γης και της Σελήνης είναι $d = 60R_\Gamma$, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης, και ο λόγος των μαζών Γης και Σελήνης M_Γ, M_Σ αντίστοιχα είναι $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} = 81$. Να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων της ευθείας που ενώνει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης στα οποία:



α) το μέτρο της συνισταμένης έντασης του βαρυτικού πεδίου είναι $g = \frac{8g_\Gamma}{9}$, όπου g_Γ είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ίδιο σημείο,

β) η συνισταμένη ένταση του βαρυτικού πεδίου είναι μηδενική,

γ) ισχύει η σχέση $\frac{V_\Gamma}{V_\Sigma} = \frac{81}{7}$, όπου V_Γ, V_Σ είναι τα δυναμικά των βαρυτικών πεδίων της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα στο ίδιο σημείο.

21.61) Από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\varphi_\Sigma = 60°$, που βρίσκεται στην επιφάνεια της Σελήνης εκτοξεύουμε σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα με μέτρο υ_0 και διεύθυνση ίδια με τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Το σώμα σταματά στιγμιαία, αφού διανύσει διάστημα $s_\Sigma = \frac{729}{484} m$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το ίδιο σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης $\varphi_\Gamma = 30°$, που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης και το σώμα σταματά στιγμιαία, αφού διανύσει διάστημα s_Γ. Οι μάζες M_Γ, M_Σ και οι ακτίνες R_Γ, R_Σ της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}=81$ και $\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}=\frac{11}{3}$. Να υπολογίσετε:

α) το διάστημα s_Γ,

β) τη γωνία κλίσης φ'_Σ που θα έπρεπε να έχει το κεκλιμένο επίπεδο στη Σελήνη, ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{s'_\Sigma}{s_\Gamma}=\frac{121}{729}$.

21.62) Από μικρό ύψος h από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε σώμα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία από το ίδιο ύψος h από την επιφάνεια της Σελήνης. Οι μάζες M_Γ, M_Σ και οι ακτίνες R_Γ, R_Σ της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}=81$ και $\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}=\frac{11}{3}$. Να συγκρίνετε:

α) τους χρόνους κίνησης του σώματος t_Γ και t_Σ μέχρι να φτάσει στο έδαφος της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα,

β) τα μέτρα των ταχυτήτων υ_Γ και υ_Σ που έχει το σώμα, όταν φτάνει στο έδαφος της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα,

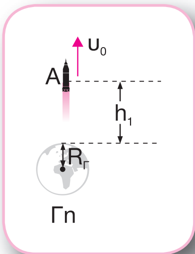
γ) τα βεληνεκή στις δύο περιπτώσεις.

21.63) Η βαρυτική δύναμη που δέχεται ένα σώμα Σ, μάζας m, που βρίσκεται στην επιφάνεια της Σελήνης έχει μέτρο $F_1=100N$. Ο όγκος μίας σφαίρας ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

α) Να υπολογίσετε τη βαρυτική δύναμη F_2 που δέχεται το σώμα Σ, όταν βρίσκεται στην επιφάνεια ενός ουράνιου σώματος Ο που έχει διπλάσια ακτίνα από τη Σελήνη και τριπλάσια πυκνότητα από αυτή.

β) Να συγκρίνετε τα μέτρα υ_{δ_1} και υ_{δ_2} των ταχυτήτων διαφυγής του σώματος Σ από τις επιφάνειες της Σελήνης και του ουράνιου σώματος Ο αντίστοιχα.

21.64) Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου υ_0 από ύψος $h_1=3R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Το σώμα σταματά στιγμιαία σε ύψος $h_2=4R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma=6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0=10m/s^2$. Να υπολογίσετε:



α) τον λόγο $\frac{U_1}{U_2}$ των δυναμικών ενεργειών U_1 και U_2 του σώματος, όταν βρίσκεται στο ύψος h_1 και στο ύψος h_2 αντίστοιχα,

β) το μέτρο υ_0 της αρχικής ταχύτητας,

γ) το ύψος h_3 πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου βρίσκεται το σώμα όταν η ταχύτητά του έχει μέτρο $\upsilon_3 = \frac{1.600\sqrt{10}}{3} m/s$.

21.65) Οι μάζες M_A, M_Γ και οι μέσες ακτίνες R_A, R_Γ του Άρη και της Γης αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις $\frac{M_A}{M_\Gamma} = \frac{11}{100}$ και $\frac{R_A}{R_\Gamma} = \frac{1}{2}$. Ο όγκος μίας σφαίρας ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Να συγκρίνετε:

α) τις μέσες πυκνότητες ρ_A και ρ_Γ του Άρη και της Γης αντίστοιχα,

β) τις εντάσεις των βαρυτικών πεδίων g_A και g_Γ στις επιφάνειες του Άρη και της Γης αντίστοιχα,

γ) τις ταχύτητες διαφυγής υ_{δ_A} και υ_{δ_Γ} από τις επιφάνειες του Άρη και της Γης αντίστοιχα.

21.66) Η μέση απόσταση d_A των κέντρων του Άρη και του Ήλιου και η μέση απόσταση d_Γ των κέντρων της Γης και του Ήλιου συνδέονται με τη σχέση $\frac{d_A}{d_\Gamma} \simeq 1,5$. Οι μάζες M_A, M_Γ του Άρη και της Γης αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $\frac{M_A}{M_\Gamma} = \frac{11}{100}$. Να συγκρίνετε:

α) τα μέτρα των δυνάμεων F_A και F_Γ που δέχονται από τον Ήλιο ο Άρης και η Γη αντίστοιχα,

β) τα μέτρα των ταχυτήτων περιφοράς υ_A και υ_Γ του Άρη και της Γης αντίστοιχα,

γ) τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων α_{κ_A} και α_{κ_Γ} του Άρη και της Γης αντίστοιχα,

δ) τις περιόδους περιφοράς T_A και T_Γ του Άρη και της Γης γύρω από τον Ήλιο αντίστοιχα.

21.67) Η ταχύτητα με την οποία φτάνει στη Γη ένας μετεωρίτης εκτιμάται από το μέγεθος του κρατήρα που ανοίγει κατά την πρόσκρουσή του στην επιφάνεια της Γης. Σύμφωνα με αυτό, ένας μετεωρίτης μάζας m έφτασε στη Γη με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = \sqrt{1,64} \cdot 10^4 m/s$. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6,4 \cdot 10^6 m$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνειά της $g_0 = 10 m/s^2$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του μετεωρίτη σε απόσταση $r = 2R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης,

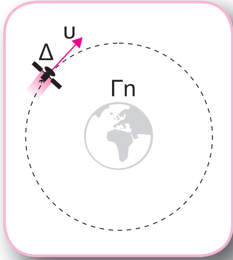
β) το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εισέρχεται ο μετεωρίτης στο βαρυτικό πεδίο της Γης.

21.68) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση r από το κέντρο της και έχει ολική ενέργεια E. Να υπολογίσετε:

α) την κινητική ενέργεια του δορυφόρου,

β) τη δυναμική ενέργεια του δορυφόρου,

γ) την ταχύτητα περιφοράς του δορυφόρου.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

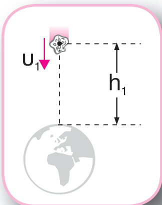
21.69) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος $h_1 = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης και έχει κινητική ενέργεια K_1. Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται ώστε αυτός ο δορυφόρος να μεταφερθεί από την επιφάνεια της Γης στο ύψος h_1 είναι E_1. Θεωρούμε γνωστές την ακτίνα R_Γ της Γης και την ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνειά της. Να υπολογίσετε:

α) τον λόγο $\dfrac{g_1}{g_0}$, όπου g_1 είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης σε ύψος h_1,

β) τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας του δορυφόρου να μεταβληθεί κατά $\dfrac{\sqrt{2g_0R_\Gamma}}{2}$, όταν αυτός περιφέρεται σε ύψος h_1,

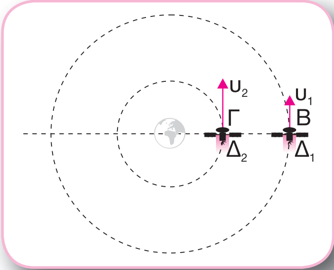
γ) τον λόγο $\dfrac{K_1}{E_1}$.

21.70) Ένας μετεωρίτης μάζας m βρίσκεται σε απόσταση $h_1 = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης και κατευθύνεται προς το κέντρο της με ταχύτητα $\upsilon_1 = \sqrt{18}\cdot 10^3 m/s$. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$, η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$ και $\sqrt{114} \simeq 10,68$. Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογίσετε:



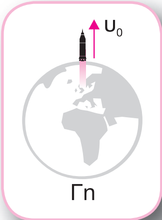
α) την ταχύτητα υ_2 του μετεωρίτη, όταν βρίσκεται σε ύψος $h_2 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης,
β) την ταχύτητα υ_3 με την οποία θα φτάσει ο μετεωρίτης στην επιφάνεια της Γης,
γ) την περίοδο περιφοράς του μετεωρίτη, εάν τον θέσουμε σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη στο ύψος h_1 πάνω από την επιφάνειά της.

21.71) Δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 περιφέρονται γύρω από τη Γη σε κυκλικές τροχιές που βρίσκονται σε ύψη $h_1 = 8R_\Gamma$ και $h_2 = 3R_\Gamma$ αντίστοιχα πάνω από την επιφάνεια της Γης. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ οι δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 διέρχονται από τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$.



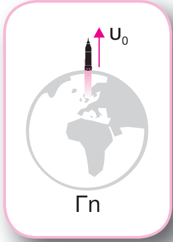
α) Να βρείτε τον λόγο $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ των ταχυτήτων των δύο δορυφόρων.
β) Να συγκρίνετε τις περιόδους της κυκλικής κίνησης των δύο δορυφόρων.
γ) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο δορυφόροι θα βρεθούν ξανά ταυτόχρονα στις θέσεις Β και Γ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t_0.
δ) Να συγκρίνετε τις ταχύτητες διαφυγής των δύο δορυφόρων Δ_1 και Δ_2, εάν εκτοξευθούν από τα ύψη h_1 και h_2 αντίστοιχα.

21.72) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma}}$, όπου M_Γ και R_Γ η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:



α) το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{2}$,
β) την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_0}{8}$,
γ) το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

21.73) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα μέτρου υ_0. Όταν το σώμα απέχει από την επιφάνεια της Γης απόσταση $h_1 = 9R_\Gamma$, έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{11GM_\Gamma}{10R_\Gamma}}$, όπου M_Γ και R_Γ η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα.



α) Να υπολογίσετε το δυναμικό και την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h_1.

β) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος σε ύψος $h_2 = 4R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης.

γ) Να ελέγξετε εάν το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

21.74) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα ένα σώμα μάζας m με ταχύτητα μέτρου υ_0. Το σώμα σταματά στιγμιαία όταν απέχει από την επιφάνεια της Γης απόσταση $h_1 = 2R_\Gamma$. Η μάζα της Γης M_Γ, η ακτίνα της R_Γ και η ένταση του βαρυτικού της πεδίου στην επιφάνειά της g_0 θεωρούνται γνωστές. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας υ_0,

β) το μέτρο υ_2 της ταχύτητας του σώματος και τον λόγο $\dfrac{U}{K}$ της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια του σώματος σε ύψος $h_2 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης,

γ) τα ποσοστά στα εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας και της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος για μετατόπισή του από ύψος $h_3 = \dfrac{R_\Gamma}{2}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης στο ύψος h_2.

21.75) Ένα διαστημικό όχημα μάζας $m = 6.000\text{kg}$ κατευθύνεται προς τη Γη. Τη στιγμή κατά την οποία το όχημα βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης έχει ταχύτητα μέτρου υ_0. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400\text{km}$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10\text{m}/\text{s}^2$.

Α. Εάν δε λειτουργήσουν οι ανασχετικοί πύραυλοι του οχήματος, το όχημα θα προσκρούσει στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10^4\text{m}/\text{s}$. Να υπολογίσετε:

α_1) την ταχύτητα υ_0,

α_2) την κινητική ενέργεια του οχήματος, όταν απέχει απόσταση $h_2 = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης.

Β. Εάν κατά τη διάρκεια καθόδου του οχήματος από το ύψος h_1 μέχρι την επιφάνεια της Γης λειτουργήσουν οι ανασχετικοί πύραυλοι δημιουργώντας σταθερή ανασχετική δύναμη F', να υπολογίσετε την τιμή της δύναμης F' ώστε το όχημα να φτάσει στην επιφάνεια της Γης:

β_1) με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 10^3 m/s$,

β_2) με μηδενική ταχύτητα.

21.76) Ένας διαστημικός σταθμός μάζας m περιφέρεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη. Όταν ο σταθμός βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 10^6 m$ από το κέντρο της Γης, έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2 \cdot 10^4 m/s$, ενώ, όταν βρίσκεται σε απόσταση r_2, η ταχύτητά του έχει μέτρο $\upsilon_2 = 4 \cdot 10^4 m/s$. Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400 km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10 m/s^2$. Να υπολογίσετε:

α) την απόσταση r_2,

β) την ενέργεια Ε που πρέπει να προσφερθεί σε μία συσκευή Σ, μάζας $m_1 = 200 kg$, που βρίσκεται στον διαστημικό σταθμό, όταν βρίσκεται σε απόσταση r_1 από το κέντρο της Γης, ώστε να φτάσει στο άπειρο με κινητική ενέργεια $K = 1{,}808 \cdot 10^{10} J$,

γ) την ελάχιστη ενέργεια E_{min} που πρέπει να προσφερθεί στη συσκευή Σ, ώστε να φτάσει στο άπειρο.

21.77) Α. Ένα διαστημικό όχημα ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα από την επιφάνεια της Γης και κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 25{,}6 m/s^2$. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400 km$, η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10 m/s^2$ και $\sqrt{\frac{128}{3}} = 6{,}53$.

α_1) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το όχημα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 25.600 m/s$.

α_2) Να υπολογίσετε την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος στο οποίο βρίσκεται το όχημα τη χρονική στιγμή t_1.

Β. Τη χρονική στιγμή t_1 το όχημα σταματά να επιταχύνεται. Να ελέγξετε εάν το όχημα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Γ. Να υπολογίσετε ποια σταθερή επιτάχυνση α' πρέπει να έχει το όχημα ώστε, όταν βρίσκεται σε απόσταση $r = 4R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης, να σταματήσει να επιταχύνεται και να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

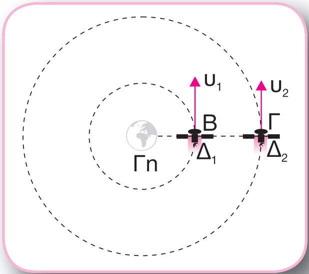
21.78) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ ένα διαστημικό όχημα μάζας m ξεκινά με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 10^3 m/s$ από την επιφάνεια της Γης και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Η προωστική δύναμη των πυραύλων του οχήματος είναι σε κάθε θέση για όλη τη διάρκεια της κίνησής του τριπλάσια κατά μέτρο και αντίθετης φοράς από το βάρος του. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$. Να υπολογίσετε:

α) την επιτάχυνση του οχήματος τη χρονική στιγμή t_0,

β) το μέτρο της ταχύτητας του οχήματος, όταν βρίσκεται σε απόσταση $h = 2R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης,

γ) την απόσταση από το κέντρο της Γης και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του οχήματος είναι $\alpha = \frac{g_0}{2}$.

21.79) Δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 έχουν ίδιες μάζες $m_1 = m_2$ και περιφέρονται γύρω από τη Γη σε κυκλικές τροχιές που βρίσκονται σε ύψη $h_1 = 8R_\Gamma$ και $h_2 = 15R_\Gamma$ αντίστοιχα πάνω από την επιφάνεια της Γης. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ οι δύο δορυφόροι Δ_1 και Δ_2 διέρχονται από τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε γνωστή την ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της.

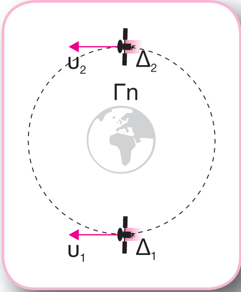


α) Να συγκρίνετε τις συχνότητες περιφοράς f_1 και f_2 των δορυφόρων Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα.

β) Να βρείτε τον λόγο $\frac{K_1}{K_2}$ των κινητικών ενεργειών K_1 και K_2 των δορυφόρων Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα.

γ) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο δορυφόρων τη χρονική στιγμή $t_1 = 32T_2$, όπου T_2 είναι η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου Δ_2.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της κεντρομόλου επιτάχυνσης του δορυφόρου Δ_1 από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5T_1}{4}$, όπου T_1 είναι η περίοδος περιφοράς του.



21.80) Ένας δορυφόρος Δ_1, μάζας $m_1 = m$, περιφέρεται γύρω από τη Γη σε απόσταση $h = R_\Gamma$ από την επιφάνειά της, όπου R_Γ η ακτίνα της Γης. Κάποια χρονική στιγμή ο δορυφόρος συγκρούεται πλαστικά με δορυφόρο Δ_2, μάζας $m_2 = m$, που κινείται σε αντίθετη φορά από τον δορυφόρο Δ_2. Να βρείτε:

α) τη σχέση των ταχυτήτων περιφοράς υ_1 και υ_2 των δορυφόρων Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα με την ταχύτητα διαφυγής τους υ_δ από το ίδιο ύψος,

β) την κοινή ταχύτητα των δορυφόρων μετά τη σύγκρουση μεταξύ τους,

γ) το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής κατά απόλυτη τιμή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο δορυφόρων κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης,

δ) την ταχύτητα του συσσωματώματος των δύο δορυφόρων, όταν φτάνει στην επιφάνεια της Γης.

21.81) Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται γύρω από τη Γη στο επίπεδο του Ισημερινού σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης. Ο δορυφόρος βρίσκεται συνεχώς πάνω από τον ίδιο τόπο του Ισημερινού. Θεωρούνται γνωστές η ακτίνα της Γης R_Γ, η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της g_0 και η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της T_Γ. Να υπολογίσετε:

α) την απόσταση r του δορυφόρου από το κέντρο της Γης,

β) το δυναμικό και την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h,

γ) τη μηχανική ενέργεια του δορυφόρου στο ύψος h,

δ) τη μεταβολή της ορμής του δορυφόρου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{3}$, όπου T είναι η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου.

21.82) Ένας δορυφόρος με μάζα $m = 200\text{kg}$ περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h_1 = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνειά της. Μετά από ορισμένο χρόνο ο δορυφόρος χάνει ύψος και περιφέρεται σε ύψος h_2. Κατά τη μετακίνηση αυτή ο δορυφόρος διανύει συνολική απόσταση μήκους $\ell = \frac{12,8}{3}10^6\text{m}$ δεχόμενος δύναμη αντίστασης σταθερού μέτρου A που είναι συνεχώς εφαπτόμενη στην ελικοειδή τροχιά του και η κινητική του ενέργεια αυξάνεται κατά $\Delta K = \frac{3,2}{3}\cdot 10^9\text{J}$. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400\text{km}$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10\text{m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

α) το ύψος h_2,

β) την ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος h_2 σε συνάρτηση με την ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της g_0 και V_0 αντίστοιχα,

γ) το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δορυφόρος από τη Γη στο ύψος h_2,

δ) το μέτρο της αντίστασης Α.

21.83) Α. Ένα διαστημικό όχημα με μάζα $M = 10^4\,kg$ περιφέρεται σε τροχιά γύρω από τη Σελήνη σε ύψος $h = 84km$ πάνω από την επιφάνειά της. Το όχημα μεταφέρει σεληνάκατο μάζας m. Δίνονται η ακτίνα της Σελήνης $R_\Sigma = 1.680km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης στην επιφάνειά της $g_0 = 1{,}6m/s^2$. Οι επιδράσεις άλλων ουράνιων σωμάτων εκτός της Σελήνης στο διαστημικό όχημα θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογίσετε:

$α_1$) το μέτρο υ_1 της ταχύτητας περιφοράς του διαστημικού οχήματος,

$α_2$) το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης σε κάποιο σημείο της τροχιάς του οχήματος.

Β. Κάποια χρονική στιγμή το όχημα ελευθερώνει τη σεληνάκατο με τέτοιον τρόπο ώστε η ταχύτητά της να είναι μηδέν. Η σεληνάκατος αρχίζει να κατεβαίνει προς τη Σελήνη εκτελώντας ευθύγραμμη κίνηση και με τη χρήση των ανασχετικών πυραύλων φτάνει στην επιφάνειά της με μηδενική ταχύτητα. Ακριβώς μετά την ελευθέρωση της σεληνακάτου το διαστημικό όχημα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = 1{,}92 \cdot 10^3\,m/s$. Να υπολογίσετε:

$β_1$) τη μάζα m της σεληνακάτου,

$β_2$) τη μεταβολή της ορμής του διαστημικού οχήματος και της σεληνακάτου κατά τη διάρκεια της ελευθέρωσης της σεληνακάτου,

$β_3$) το έργο W_F της δύναμης των ανασχετικών πυραύλων κατά τη μετακίνηση της σεληνακάτου από ύψος h μέχρι την επιφάνεια της Σελήνης.

21.84) Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω πύραυλο χωρίς αρχική ταχύτητα ο οποίος περιέχει σώμα μάζας $m = 200kg$. Το σώμα δέχεται από τον πύραυλο προωστική δύναμη F μέχρι να φτάσει σε ύψος $h = 3R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου R_Γ η ακτίνα της Γης. Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $F = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^{-3}\left(x - R_\Gamma\right)$ SI με $x \geq R_\Gamma$, όπου x η απόσταση του πυραύλου από το κέντρο της Γης. Όταν ο πύραυλος φτάνει στο ύψος h, εξαντλούνται τα καύσιμά του. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6.400km$ και η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10m/s^2$. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα διαφυγής στο ύψος h,

β) την ταχύτητα του σώματος στο ύψος h και να αποδείξετε ότι το σώμα θα διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης,

γ) την ταχύτητα που θα έχει το σώμα, όταν βγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

21.85) Ένας δορυφόρος Δ με μάζα m περιφέρεται γύρω από τη Γη σε απόσταση $r = 2R_{\Gamma}$ από το κέντρο της. Με εσωτερικό μηχανισμό προκαλείται διάσπαση του δορυφόρου σε δύο τμήματα Δ_1 και Δ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το τμήμα Δ_1 κινείται στην ίδια τροχιά αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική. Το τμήμα Δ_2 φτάνει στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2' = \sqrt{5g_0R_{\Gamma}}$. Θεωρούνται γνωστές η ακτίνα R_{Γ} της Γης και η ένταση g_0 του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα υ του δορυφόρου Δ ακριβώς πριν από τη διάσπαση και την ταχύτητα υ_1 του τμήματος Δ_1 ακριβώς μετά τη διάσπαση, καθώς και τις περιόδους περιφοράς του δορυφόρου Δ και του τμήματος Δ_1,

β) το μέτρο της ταχύτητας του τμήματος Δ_2 ακριβώς μετά τη διάσπαση,

γ) τις σχέσεις των μαζών m_1 και m_2 με τη μάζα m,

δ) τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια της διάσπασης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

α) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

i) Το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ανομοιογενές.

ii) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης.

iii) Το βαρυτικό πεδίο της Γης είναι ακτινικό και η έντασή του σε ένα σημείο έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση που ορίζεται από το κέντρο της Γης και το σημείο.

β) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

i) Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της Γης.

ii) Εάν μία μάζα αφεθεί ελεύθερη στο βαρυτικό πεδίο της Γης, θα κινηθεί προς σημεία όπου η δυναμική της ενέργεια αυξάνεται.

iii) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος της Γης και μίας μάζας που βρίσκεται στο βαρυτικό πεδίο της Γης είναι πάντοτε αρνητική.

γ) Ένας πλανήτης περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Ποια πρόταση είναι σωστή;

i) Η ολική ενέργεια του πλανήτη είναι θετική.

ii) Η δυναμική ενέργεια του πλανήτη είναι αρνητική.

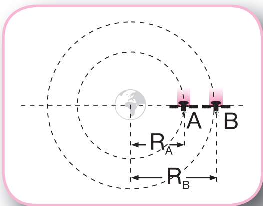
iii) Η κινητική ενέργεια του πλανήτη είναι μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας.

δ) Ένα σώμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής. Η ολική ενέργεια του σώματος είναι:

i) $E=0$ ii) $E>0$ iii) $E<0$

Θέμα 2ο

α) Δύο δορυφόροι Α και Β με μάζες m_A και $m_B = 3m_A$ περιφέρονται γύρω από τη Γη σε κυκλικές τροχιές ακτίνων $R_A = 3R_\Gamma$ και $R_B = 5R_\Gamma$ αντίστοιχα, όπου R_Γ είναι η ακτίνα της Γης. Οι κινητικές ενέργειες των δορυφόρων συνδέονται με τη σχέση:



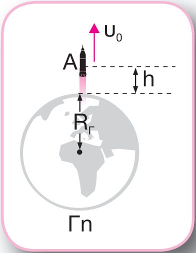
i) $\frac{K_A}{K_B} = \frac{5}{9}$ ii) $\frac{K_A}{K_B} = \frac{4}{9}$ iii) $\frac{K_A}{K_B} = \frac{2}{3}$

β) Ένας πλανήτης Π έχει ακτίνα $R_{\Pi} = \frac{R_{\Gamma}}{2}$ και μέση πυκνότητα $\rho_{\Pi} = \frac{3\rho_{\Gamma}}{4}$, όπου R_{Γ} και ρ_{Γ} είναι αντίστοιχα η ακτίνα και η μέση πυκνότητα της Γης. Ο όγκος μίας ομογενούς σφαίρας ακτίνας R υπολογίζεται από τη σχέση $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Η ταχύτητα διαφυγής $\upsilon_{\delta_{\Pi}}$ ενός σώματος από την επιφάνεια του πλανήτη Π και η ταχύτητα διαφυγής $\upsilon_{\delta_{\Gamma}}$ του ίδιου σώματος από την επιφάνεια της Γης συνδέονται με τη σχέση:

i) $\upsilon_{\delta_{\Pi}} = \frac{\upsilon_{\delta_{\Gamma}}\sqrt{3}}{2}$ ii) $\upsilon_{\delta_{\Pi}} = \frac{\upsilon_{\delta_{\Gamma}}\sqrt{3}}{4}$ iii) $\upsilon_{\delta_{\Pi}} = \frac{\upsilon_{\delta_{\Gamma}}\sqrt{3}}{8}$

Θέμα 3ο

Από το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h = \frac{R_{\Gamma}}{3}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύεται σώμα μάζας m με ταχύτητα $\upsilon_1 = \sqrt{3g_0 R_{\Gamma}}$, όπου R_{Γ} είναι η ακτίνα της Γης και g_0 η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της.



α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διαφυγής του σώματος από το σημείο Α.
β) Να ελέγξετε εάν το σώμα θα βγει από το πεδίο βαρύτητας και να βρείτε την ταχύτητα την οποία θα έχει εκτός του βαρυτικού πεδίου.
γ) Να υπολογίσετε το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Γης στο σημείο όπου το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{3g_0 R_{\Gamma}}{8}}$.

Θέμα 4ο

Α. Δύο σφαιρικοί πλανήτες Π_1 και Π_2 περιφέρονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους, εκτελώντας κυκλικές κινήσεις χωρίς την επίδραση άλλων δυνάμεων εκτός από τη μεταξύ τους έλξη. Η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο πλανητών Π_1 και Π_2 είναι $\ell = 82R_1$, όπου R_1 είναι η ακτίνα του πλανήτη Π_1, και οι μάζες τους m_1 και m_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $m_2 = 9m_1$. Να βρείτε:

$α_1$) τη σχέση μεταξύ των ακτίνων r_1, r_2 των κυκλικών τροχιών των δύο πλανητών και της απόστασης ℓ μεταξύ τους,

$α_2$) τη σχέση μεταξύ των κεντρομόλων επιταχύνσεων των δύο πλανητών,

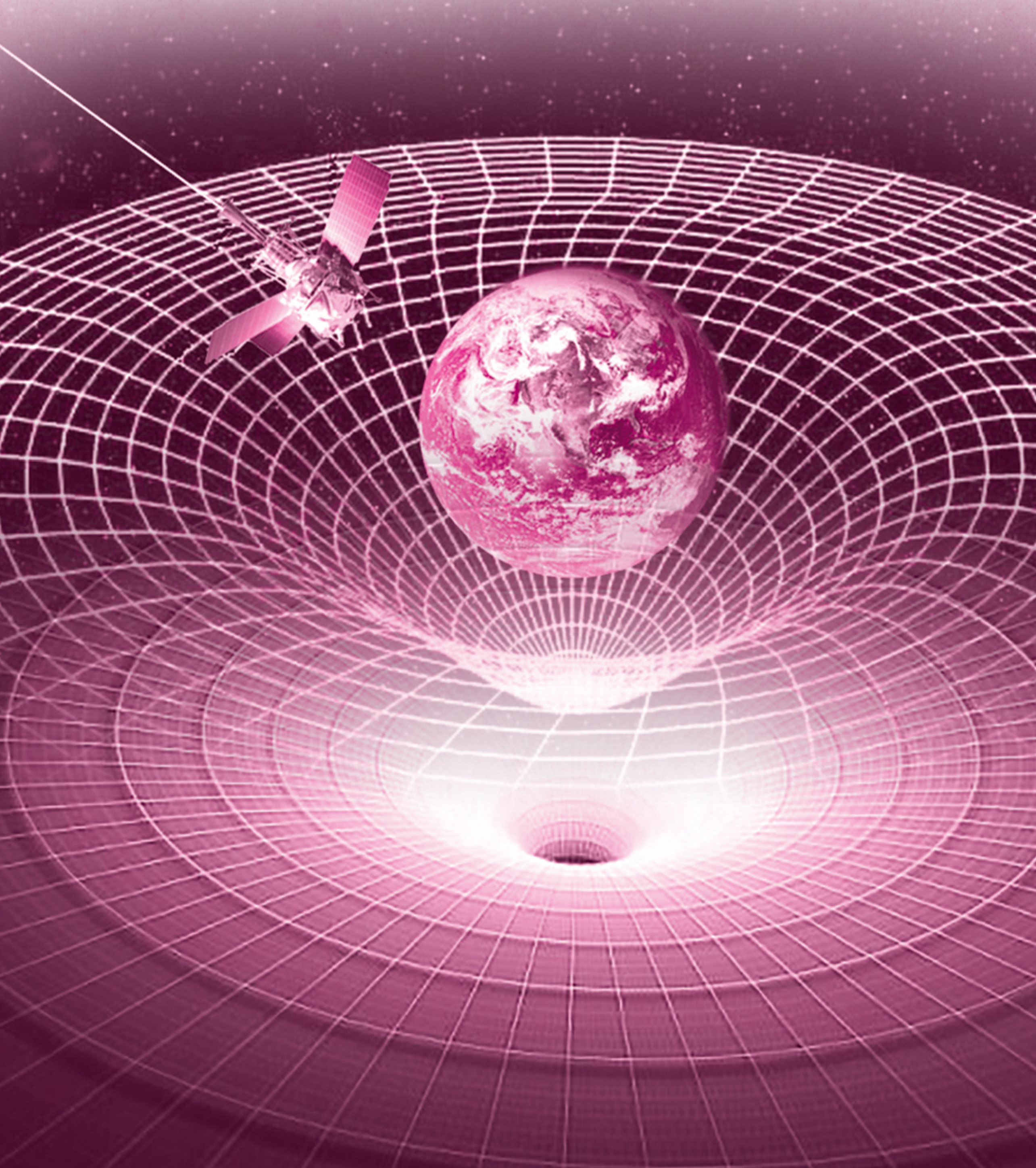
$α_3$) τη σχέση μεταξύ των μέτρων της μεταβολής της ορμής σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{4}$, όπου Τ είναι η περίοδος περιφοράς των δύο πλανητών.

Β. Εκτοξεύουμε ένα βλήμα από την επιφάνεια του πλανήτη Π_1. Να υπολογίσετε:

β_1) τη θέση όπου η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το βλήμα είναι μηδέν,

β_2) την ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το βλήμα, ώστε να φτάσει στον πλανήτη Π_2.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ερωτήσεις θεωρίας

20.12) Βλέπε 20.1
20.13) Βλέπε 20.1
20.14) Βλέπε 20.3
20.15) Βλέπε Παρατηρήσεις
20.16) Βλέπε Παρατηρήσεις
20.17) Βλέπε 20.7
20.18) Βλέπε Παρατηρήσεις

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

20.19) γ
20.20) α
20.21) α
20.22) γ
20.23) β
20.24) γ
20.25) γ
20.26) β
20.27) β
20.28) α, β
20.29) γ
20.30) α
20.31) β
20.32) γ
20.33) γ
20.34) γ
20.35) β
20.36) β
20.37) γ
20.38) γ
20.39) β
20.40) α
20.41) γ
20.42) β
20.43) β
20.44) γ
20.45) β
20.46) α
20.47) α

Ερωτήσεις κατανόησης

20.48) β: $\frac{F'}{F} = \frac{G\frac{3m_1 \cdot 3m_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}}{G\frac{m_1 m_2}{r^2}} = 36$ ή $F' = 36F$

20.49) γ: Οι δύο δυνάμεις F_1 και F_2 έχουν σχέση δράσης - αντίδρασης.

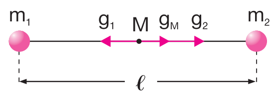
20.50) α: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\frac{m_1 m_3}{\left(\frac{R}{4}\right)^2}}{G\frac{m_2 m_3}{\left(\frac{3R}{4}\right)^2}} = \frac{2m_2 \cdot \left(\frac{3R}{4}\right)^2}{m_2\left(\frac{R}{4}\right)^2} = 18$ ή $F_1 = 18F_2$

20.51) γ: Οι δυνάμεις που δέχονται τα Σ_1, Σ_2 έχουν ίσα μέτρα. Επομένως:

$F_1 = F_2$ ή $m_1\alpha_1 = m_2\alpha_2$ ή $4m_2\alpha_1 = m_2\alpha_2$ ή $\alpha_2 = 4\alpha_1$

20.52) γ: $g_M = g_2 - g_1 = G\frac{m_2}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} - G\frac{m_1}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} =$

$= 3G\frac{m}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = 12G\frac{m}{\ell^2}$

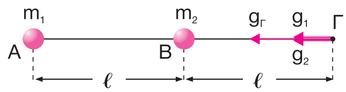


20.53) α: $\frac{g_A}{g_B} = \frac{G\frac{m}{d_A^2}}{G\frac{m}{d_B^2}} = \frac{d_B^2}{d_A^2} = \frac{\frac{9d^2}{16}}{d^2} = \frac{9}{16}$ ή

$g_B = 160 N/kg$

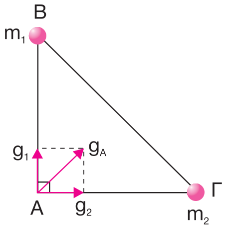
20.54) β: $g_\Gamma = g_1 + g_2 = G\frac{m_1}{(2\ell)^2} + G\frac{m_2}{\ell^2} =$

$= G\frac{4m}{4\ell^2} + G\frac{m}{\ell^2} = 2G\frac{m}{\ell^2}$



20.55) α: $g_1 = g_2 = G\frac{m}{d^2}$

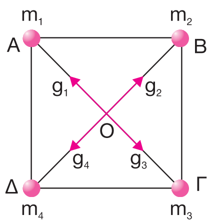
$g_A=\sqrt{g_1^2+g_2^2}=G\frac{m\sqrt{2}}{d^2}$



20.56) γ: $g_{1,3}=g_1-g_3=G\frac{m_1}{(AO)^2}-G\frac{m_3}{(\Gamma O)^2}=0$

$g_{2,4}=g_2-g_4=G\frac{m_2}{(BO)^2}-G\frac{m_4}{(\Delta O)^2}=0$

Άρα: $g_0=0$



20.57) β: $|V_A|=\frac{60}{100}|V_B|$ ή $G\frac{m}{r_A}=0,6G\frac{m}{r_B}$ ή $\frac{r_B}{r_A}=\frac{3}{5}$

20.58) α: $V_2=\frac{V_1}{9}$ ή $-G\frac{m}{r_2}=-\frac{1}{9}G\frac{m}{r_1}$ ή $\frac{r_2}{r_1}=9$ ή

$r_2=9r_1$

20.59) γ: $V_\Gamma=V_1+V_2=-G\frac{m_1}{r+\frac{r}{4}}-G\frac{m_2}{\frac{r}{4}}=-\frac{4}{5}G\frac{m}{r}-G\frac{6m}{\frac{r}{4}}=$

$=-\frac{4}{5}G\frac{m}{r}-24G\frac{m}{r}=-\frac{124}{5}G\frac{m}{r}$

20.60) α: $V_M=V_1+V_2=-G\frac{m_1}{\frac{r}{2}}-G\frac{m_2}{\frac{r}{2}}=-2G\frac{m}{r}-8G\frac{m}{r}=$

$=-10G\frac{m}{r}\neq 0$

20.61) γ: Επειδή η δύναμη μεταξύ των σφαιρών είναι ελκτική, η σφαίρα Σ_1 θα κινηθεί προς τη σφαίρα Σ και επομένως η απόστασή τους θα μειώνεται. Έστω ένα σημείο όπου η σφαίρα Σ_1 απέχει απόσταση $r_2<r_1$ από τη σφαίρα Σ.

$\frac{|V_2|}{|V_1|}=\frac{G\frac{m}{r_2}}{G\frac{m}{r_1}}$ ή $\frac{|V_2|}{|V_1|}=\frac{r_1}{r_2}$ ή $|V_2|>|V_1|$ (1)

Επειδή V_1, $V_2<0$, από τη σχέση (1) προκύπτει: $V_2<V_1$

20.62) α: $\frac{W_F^{\Gamma\to\Delta}}{W_F^{B\to\Gamma}}=\frac{m(V_\Gamma-V_\Delta)}{m(V_B-V_\Gamma)}=\frac{-G\frac{M}{2d}+G\frac{M}{5d}}{-G\frac{M}{d}+G\frac{M}{2d}}=\frac{-\frac{3}{10}}{-\frac{1}{2}}=\frac{6}{10}$

ή $W_F^{\Gamma\to\Delta}=\frac{3}{5}W_F^{B\to\Gamma}$

Ασκήσεις

20.63) $F=G\frac{m_p^2}{r^2}=4,65\cdot10^{-35}N$

Για $r'=2r$ έχουμε: $F'=G\frac{m_p^2}{(2r)^2}=\frac{F}{4}=1,1625\cdot10^{-35}N$

20.64) α) Έστω ότι η Σ_3 απέχει απόσταση x από τη Σ_1.

$F_1=F_2$ ή $G\frac{m_1m_3}{x^2}=G\frac{m_2m_3}{(d-x)^2}$ ή $\frac{m_1}{x^2}=\frac{m_2}{(d-x)^2}$ ή

$\frac{(d-x)^2}{x^2}=\frac{49}{25}$ ή $\frac{d-x}{x}=\pm\frac{7}{5}$

Άρα: $5d-5x=7x$ ή $12x=5d$ ή $x=10m$

$5d-5x=-7x$ ή $x=-\frac{5}{2}d$ (απορρίπτεται)

β) $\Sigma F=F_2'-F_1'=G\frac{m_2m_3}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}-G\frac{m_1m_3}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\simeq 2,22\cdot10^{-11}N$

20.65) α) $F_{1,2}=F_{2,1}=G\frac{m_1m_2}{d^2}=8,004\cdot10^{-10}N$

β) $\Sigma F=F_1+F_2=G\frac{m_1m_3}{d_1^2}+G\frac{m_2m_3}{(d+d_1)^2}=9,338\cdot10^{-10}N$

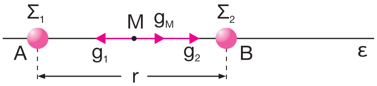
20.66) α) $g_A=G\frac{M}{r_A^2}$ ή $M=\frac{g_Ar_A^2}{G}$ ή $M=10kg$

β) $F=mg_A$ ή $F=6,673\cdot10^{-10}N$

γ) $g_B=G\frac{M}{r_B^2}=G\frac{M}{(0,6r_A)^2}=G\frac{M}{0,36r_A^2}=$

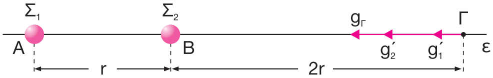
$=\frac{g_A}{0,36}=1,853\cdot10^{-9}N/kg$

20.67) α$_1$) $g_M = g_2 - g_1 = G\dfrac{m_2}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2} - G\dfrac{m_1}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2} = 32G\dfrac{m_1}{r^2}$



α$_2$) $g_\Gamma = g_1' + g_2' = G\dfrac{m_1}{(3r)^2} + G\dfrac{m_2}{(2r)^2} =$

$= G\dfrac{m_1}{9r^2} + G\dfrac{9m_1}{4r^2} = G\dfrac{85m_1}{36r^2}$



Β. Το σημείο Δ πρέπει να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Εάν το σημείο Δ απέχει από το σημείο Α απόσταση x, έχουμε:

$g_\Delta = 0$ ή $G = \dfrac{m_1}{x^2} = G\dfrac{m_2}{(r-x)^2}$ ή $\left(\dfrac{r-x}{x}\right)^2 = 9$ ή

$\dfrac{r-x}{x} = \pm 3$

Άρα: $r - x = 3x$ ή $4x = r$ ή $x = \dfrac{r}{4}$ και

$r - x = -3x$ ή $-2x = r$ ή $x = -\dfrac{r}{2}$ (απορρίπτεται)

20.68) α$_1$) $g_B = G\dfrac{m_1}{r^2}$ ή $r = \sqrt{\dfrac{Gm_1}{g_B}}$ ή $r = 0{,}1\text{m}$

α$_2$) $g_\Gamma = G\dfrac{m_1}{r_\Gamma^2} = G\dfrac{m_1}{4r^2} = \dfrac{g_B}{4}$

$F_{1,2} = m_2 g_\Gamma = 0{,}834 \cdot 10^{-9}\,\text{N}$

Β. $\dfrac{g_\Delta - g_B}{g_B} \cdot 100\% = -\dfrac{800}{9}$ ή $\dfrac{g_\Delta}{g_B} - 1 = -\dfrac{8}{9}$ ή $\dfrac{g_\Delta}{g_B} = \dfrac{1}{9}$

ή $9g_\Delta = g_B$ ή $9G\dfrac{m_1}{r_\Delta^2} = G\dfrac{m_1}{r^2}$ ή $\dfrac{r_\Delta^2}{r^2} = 9$ ή

$r_\Delta = 3r = 0{,}3\text{m}$

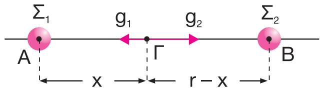
20.69) α) Έστω ότι $\text{ΑΓ} = x$, οπότε $\text{ΓΒ} = r - x$.

$g_2 = 36g_1$ ή $G\dfrac{m_2}{(r-x)^2} = 36G\dfrac{m_1}{x^2}$ ή $\dfrac{36m_1}{(r-x)^2} = \dfrac{36m_1}{x^2}$

ή $x^2 = (r-x)^2$

Άρα: $r - x = x$ ή $x = \dfrac{r}{2}$

$r - x = -x$ ή $r = 0$ (άτοπο)



β) Έστω ότι $\text{ΑΔ} = x'$, οπότε $\text{ΔΒ} = x' + r$.

$g_1' = \dfrac{1}{4}g_2'$ ή $G\dfrac{m_1}{x'^2} = \dfrac{1}{4}G\dfrac{m_2}{(r+x')^2}$ ή

$\dfrac{(r+x')^2}{x'^2} = 9$ ή $r + x' = \pm 3x'$

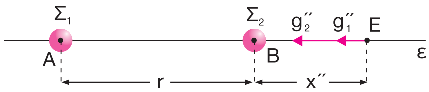
Άρα: $r + x' = 3x'$ ή $x' = \dfrac{r}{2}$ και $r + x' = -3x'$ ή

$x' = -\dfrac{r}{4}$ (απορρίπτεται)

γ) Έστω $\text{ΕΒ} = x''$, οπότε $\text{ΕΑ} = r + x''$.

$g_1'' = \dfrac{1}{100}g_2''$ ή $G\dfrac{m_1}{(r+x'')^2} = \dfrac{1}{100}G\dfrac{m_2}{x''^2}$ ή

$\dfrac{x''^2}{(r+x'')^2} = \dfrac{36}{100}$ ή $6(r+x'') = \pm 10x''$

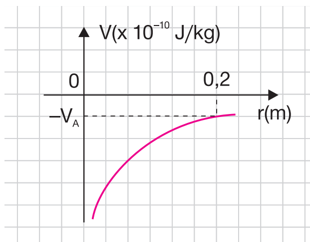


Άρα: $6(r+x'') = 10x''$ ή $x'' = \dfrac{3r}{2}$ και $6(r+x'') = -10x''$

ή $x'' = -\dfrac{3r}{8}$ (απορρίπτεται)

20.70) α) $V_A = -G\dfrac{m}{r_A}$ ή $r_A = -G\dfrac{m}{V_A}$ ή $r_A = 0{,}2\text{m}$

β)



γ) $\pi_{V_A}\,\% = \dfrac{|V_A'| - |V_A|}{|V_A|}100\% = \left(\dfrac{|V_A'|}{|V_A|} - 1\right)100\% =$

$$=\left(\frac{\left|-G\frac{m'}{r_A}\right|}{\left|-G\frac{m}{r_A}\right|}-1\right)100\%=\left(\frac{m'}{m}-1\right)100\%=-75\%$$

20.71) α) $V_A=-G\frac{m}{r_A}$ ή $r_A=-G\frac{m}{V_A}$ ή $r_A=16\text{m}$

$g_B=G\frac{m}{r_B^2}$ ή $r_B=\sqrt{G\frac{m}{g_B}}$ ή $r_B=20\text{m}$

β) $V_B=-G\frac{m}{r_B}$ ή $V_B=-1{,}3346\cdot10^{-11}\text{J/kg}$

γ) $W_F^{B\to A}=m_1\left(V_B-V_A\right)=6{,}673\cdot10^{-12}\text{J}$

20.72) α) Έστω $\text{ΒΓ}=x$.

$|V_1|=4|V_2|$ ή $\left|-G\frac{m_1}{r+x}\right|=\left|-4G\frac{m_2}{x}\right|$ ή $\frac{m_1}{r+x}=\frac{m_1}{2x}$ ή

$2x=r+x$ ή $x=r$

β) $V_\Gamma=V_1+V_2=5V_2=-5G\frac{m_2}{x}=-\frac{5}{8}G\frac{m_1}{r}$

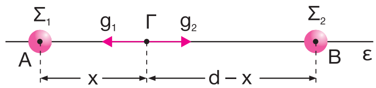
$U_3=m_3V_\Gamma=-\frac{5}{4}G\frac{m_1^2}{r}$

γ) $W^{\Gamma\to\infty}=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}=U_3-0=-\frac{5}{4}G\frac{m_1^2}{r}$

20.73) α) Έστω $\Gamma\text{Α}=x$, οπότε $\Gamma\text{Β}=d-x$.

$g_\Gamma=0$ ή $g_1-g_2=0$ ή $G\frac{m_1}{x^2}=G\frac{m_2}{(d-x)^2}$ ή

$\frac{(d-x)^2}{x^2}=\frac{49m}{4m}$ ή $\frac{d-x}{x}=\pm\frac{7}{2}$



Επομένως: $\frac{d-x}{x}=\frac{7}{2}$ ή $2d-2x=7x$ ή $x=\frac{2d}{9}$ και

$\frac{d-x}{x}=-\frac{7}{2}$ ή $2d-2x=-7x$ ή

$x=-\frac{2d}{5}$ (απορρίπτεται)

β) $V_\Gamma=V_1+V_2=-G\frac{m_1}{x}-G\frac{m_2}{d-x}=$

$=-G\frac{4m}{\frac{2d}{9}}-G\frac{49m}{\frac{7d}{9}}=-81G\frac{m}{d}$

γ) $W_F^{\Gamma\to\Delta}=m_3\left(V_\Gamma-V_\Delta\right)=-m_3V_\Gamma=81G\frac{m^2}{d}$

20.74) α) $V_B=-G\frac{m_1}{r_B}=-13{,}346\cdot10^{-11}\text{J/kg}$

β) $\Delta U_{B\Gamma}=U_\Gamma-U_B$ ή $U_\Gamma=\Delta U_{B\Gamma}+U_B$ ή

$-G\frac{m_1m_2}{r_\Gamma}=\Delta U_{B\Gamma}-G\frac{m_1m_2}{r_B}$ ή $r_\Gamma=\frac{-Gm_1m_2}{\Delta U_{B\Gamma}-G\frac{m_1m_2}{r_B}}$ ή

$r_\Gamma=2\text{m}$

γ) $\frac{F_B}{F_\Gamma}=\frac{G\frac{m_1m_2}{r_B^2}}{G\frac{m_1m_2}{r_\Gamma^2}}=\frac{r_\Gamma^2}{r_B^2}=4$ ή $F_B=4F_\Gamma$

20.75) α) $U=U_{1,2}+U_{1,3}+U_{2,3}=$

$=-G\frac{m_1m_2}{\alpha}-G\frac{m_1m_3}{\alpha}-G\frac{m_2m_3}{\alpha}=-11\cdot10^{-10}\text{J}$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σύστημα από την αρχική θέση μέχρι το άπειρο:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F+W_{F_{\varepsilon\xi}}$ ή $0-0=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}+W_{F_{\varepsilon\xi}}$ ή

$W_{F_{\varepsilon\xi}}=U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi}$ ή $W_{F_{\varepsilon\xi}}=0-U_{\alpha\rho\chi}$ ή $W_{F_{\varepsilon\xi}}=11\cdot10^{-10}\text{J}$

Προβλήματα

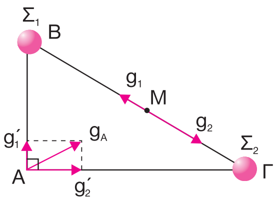
20.76) $\text{ΒΓ}=\sqrt{\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2}=\sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}=2\alpha$, άρα:

$\text{ΒΜ}=\text{ΜΓ}=\alpha$

$g_M=g_2-g_1=G\frac{m_2}{\alpha^2}-G\frac{m_1}{\alpha^2}$ ή $g_M=9G\frac{m}{\alpha^2}$

$g_A=\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}=\sqrt{\left(G\frac{m_1}{\alpha^2}\right)^2+\left(G\frac{m_2}{3\alpha^2}\right)^2}=$

$=G\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^4}+\frac{100m^2}{9\alpha^4}}=G\frac{m\sqrt{109}}{3\alpha^2}$ ή $g_A=g_M\frac{\sqrt{109}}{27}$



20.77) α) $\Sigma g_x=g_{1_x}-g_{2_x}$ ή $\Sigma g_x=0$

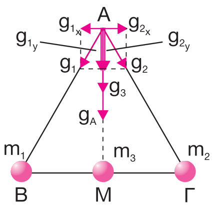
$\text{ΑΜ}^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}$

$\Sigma g_y=g_{1_y}+g_{2_y}+g_3$ ή

$\Sigma g_y=g_1\sigma\upsilon\nu30°+g_2\sigma\upsilon\nu30°+g_3$ ή

$$\Sigma g_y = G\frac{m}{\alpha^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + G\frac{m}{\alpha^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + G\frac{3\sqrt{3}m}{8(AM)^2} \quad ή$$

$$\Sigma g_y = 3G\frac{m\sqrt{3}}{2\alpha^2}$$



β) $V_A = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m_1}{\alpha} - G\frac{m_2}{\alpha} - G\frac{m_3}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} =$

$$= -G\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + \frac{\frac{3\sqrt{3}m}{8}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}\right) = -\frac{11}{4}G\frac{m}{\alpha}$$

γ) $W_F^{A\to\infty} = m_4\left(V_A - V_\infty\right) = -\frac{11}{4}G\frac{m^2}{\alpha}$

20.78) α) $AO = BO = \Gamma O = \Delta O = x$

$x^2 + x^2 = \alpha^2 \quad ή \quad 2x^2 = \alpha^2 \quad ή \quad x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

$V_O = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -G\frac{m_1}{x} - G\frac{m_2}{x} - G\frac{m_3}{x} - G\frac{m_4}{x} =$

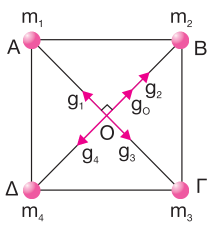
$= -8G\frac{m}{x} = -8\sqrt{2}G\frac{m}{\alpha}$

β) $U = m_5V_O = -32G\frac{m}{\alpha}$

γ) $g_{1,3} = g_1 - g_3 = G\frac{m_1}{x^2} - G\frac{m_3}{x^2} = G\frac{m}{x^2} - G\frac{m}{x^2} = 0$

$g_{2,4} = g_2 - g_4 = G\frac{m_2}{x^2} - G\frac{m_4}{x^2} = \frac{G}{x^2}(4m - 2m) =$

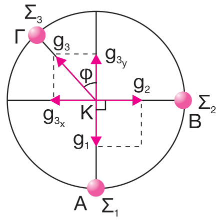
$= 2G\frac{m}{x^2} = 4G\frac{m}{\alpha^2}$



Άρα: $g_O = g_{2,4} = 4G\frac{m}{\alpha^2}$

20.79) α) $V_K = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m_1}{R} - G\frac{m_2}{R} - G\frac{m_3}{R} =$

$= -\frac{G}{R}(m_1 + m_2 + m_3) = -\left(2 + \sqrt{2}\right)G\frac{m}{R}$



β) $W_F^{K\to\infty} = m_4V_K = -\left(4 + 2\sqrt{2}\right)G\frac{m^2}{R}$

γ) $\Sigma g_x = g_2 - g_{3_x} = G\frac{m_2}{R^2} - G\frac{m_3}{R^2}ημφ =$

$= G\frac{m}{R^2} - G\frac{m\sqrt{2}}{R^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Sigma g_y = g_1 - g_{3_y} = G\frac{m_1}{R^2} - G\frac{m_3}{R^2}συνφ =$

$= G\frac{m}{R^2} - G\frac{m\sqrt{2}}{R^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Άρα: $g_K = 0$

20.80) α) $V_\Gamma = V_{\Gamma_1} + V_{\Gamma_2} = -G\frac{m_1}{3d} - G\frac{m_2}{2d} =$

$= -G\frac{m}{3d} - G\frac{8m}{2d} = -\frac{13}{3}G\frac{m}{d}$

$V_\Delta = V_{\Delta_1} + V_{\Delta_2} = -G\frac{m_1}{d} - G\frac{m_2}{2d} =$

$= -G\frac{m}{d} - G\frac{4m}{d} = -5G\frac{m}{d} = \frac{15}{13}V_\Gamma$

β) $W_F^{\Gamma\to\Delta} = m\left(V_\Gamma - V_\Delta\right) = m\left(V_\Gamma - \frac{15}{13}V_\Gamma\right) =$

$= -\frac{2}{13}mV_\Gamma = \frac{2}{3}G\frac{m^2}{d}$

γ) $g_\Gamma = g_{\Gamma_1} + g_{\Gamma_2} = G\frac{m_1}{(3d)^2} + G\frac{m_2}{(2d)^2} =$

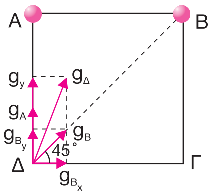
$= G\left(\frac{m}{9d^2} + \frac{8m}{4d^2}\right) = \frac{19}{9}G\frac{m}{d^2}$

$$g_\Delta = g_{\Delta_1} + g_{\Delta_2} = G\frac{m_1}{d^2} + G\frac{m_2}{(2d)^2} =$$

$$= G\left(\frac{m}{d^2} + \frac{8m}{4d^2}\right) = 3G\frac{m}{d^2}$$

$$\frac{g_\Gamma}{g_\Delta} = \frac{\frac{19}{9}G\frac{m}{d^2}}{3G\frac{m}{d^2}} = \frac{19}{27}$$

20.81) α) $F = G\frac{m_1 m_2}{\alpha^2} = G\frac{2m_1^2}{\alpha^2}$



β) $(\text{ΑΓ})^2 = 2\alpha^2$ ή $\text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2}$ και ομοίως: $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{2}$

$$V_\Gamma = V_{\Gamma_1} + V_{\Gamma_2} = -G\frac{m_1}{\text{ΑΓ}} - G\frac{m_2}{\text{ΒΓ}} =$$

$$= -G\frac{m_1}{\alpha\sqrt{2}} - G\frac{2m_1}{\alpha} = -2{,}705G\frac{m_1}{\alpha}$$

$$V_\Delta = V_{\Delta_1} + V_{\Delta_2} = -G\frac{m_1}{\alpha} - G\frac{2m_1}{\alpha\sqrt{2}} =$$

$$= -2{,}41G\frac{m_1}{\alpha}$$

γ) $W_F^{\Gamma\to\infty} = m_3 V_\Gamma = -2{,}705G\frac{m_1^2}{\alpha}$

δ) $\Sigma g_x = g_{B_x} = g_B \sigma\upsilon\nu 45° = G\frac{2m_1}{2\alpha^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot G\frac{m_1}{\alpha^2}$

$$\Sigma g_y = g_{B_y} + g_A = g_B \eta\mu 45° + g_A = G\frac{2m_1}{2\alpha^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + G\frac{m_1}{\alpha^2} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)G\frac{m_1}{\alpha^2}$$

$$g_\Delta = \sqrt{\Sigma g_x^2 + \Sigma g_y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}G^2\frac{m_1^2}{\alpha^4} + \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)^2 G^2\frac{m_1^2}{\alpha^4}} =$$

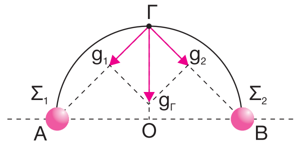
$$= G\frac{m_1}{\alpha^2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{3{,}41}G\frac{m_1}{\alpha^2}$$

20.82) α) $\text{ΑΓ} = \text{ΒΓ} = R\sqrt{2}$

$$V_\Gamma = V_{\Gamma_1} + V_{\Gamma_2} = -G\frac{m_1}{\text{ΑΓ}} - G\frac{m_2}{\text{ΒΓ}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2G\frac{m}{R} = -\sqrt{2}G\frac{m}{R}$$

$$V_O = V_{O_1} + V_{O_2} = -G\frac{m_1}{R} - G\frac{m_2}{R} = -2G\frac{m}{R}$$



β) $W_F^{\Gamma\to O} = m_3(V_\Gamma - V_O) = m\left(-\sqrt{2}G\frac{m}{R} + 2G\frac{m}{R}\right) =$

$$= 0{,}59G\frac{m^2}{R}$$

γ) $g_1 = G\frac{m_1}{\text{ΑΓ}^2} = G\frac{m}{2R^2}$, $g_2 = G\frac{m_2}{\text{ΒΓ}^2} = G\frac{m}{2R^2}$

$$g_\Gamma = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = g_1\sqrt{2} = G\frac{m\sqrt{2}}{2R^2}$$

20.83) α) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' - m_2\upsilon_2'$ ή

$4m\upsilon = 4m\cdot 2\upsilon - m\upsilon_2'$ ή $\upsilon_2' = 4\upsilon$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - G\frac{m_1 m_2}{\ell} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad ή$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4m\upsilon^2 - G\frac{4m^2}{\ell} = \frac{1}{2}\cdot 4m\cdot 4\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\cdot 16\upsilon^2 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad ή$$

$$U_{\tau\varepsilon\lambda} = -4G\frac{m^2}{\ell} - 14m\upsilon^2$$

β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}'_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon' - m_2\upsilon'$ ή

$4m\upsilon = 4m\upsilon' - m\upsilon'$ ή $\upsilon' = \frac{4}{3}\upsilon$

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K'_{\tau\varepsilon\lambda} + U'_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - G\frac{m_1 m_2}{\ell} = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon'^2 + U'_{\tau\varepsilon\lambda} \quad ή$$

$$U'_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}4m\upsilon^2 - 4G\frac{m^2}{\ell} - 2m\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 \quad ή$$

$$U'_{\tau\varepsilon\lambda} = -4G\frac{m^2}{\ell} - \frac{22}{9}m\upsilon^2$$

20.84) α) $\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta t}\right)_1 = \Sigma F_1 = G\dfrac{m_1 m_2}{\ell^2} = 2G\dfrac{m^2}{\ell^2}$ και ομοίως:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_2 = 2G\frac{m^2}{\ell^2}$$

β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = m_1\upsilon_0 - m_2\upsilon_0 = m\upsilon_0$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι η ορμή πρέπει να έχει συνεχώς θετική κατεύθυνση. Άρα, θα σταματήσει πρώτα η σφαίρα Σ_2.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \acute{\eta} \quad m\upsilon_0 = m_1\upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad m\upsilon_0 = 2m\upsilon_1 \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{2}$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \acute{\eta}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 - G\frac{m_1m_2}{\ell} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \acute{\eta}$$

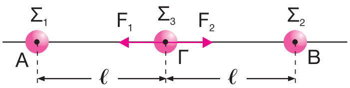
$$U_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{5}{4}m\upsilon_0^2 - 2G\frac{m^2}{\ell}$$

γ) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}\,'_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m\upsilon_0 = m_1\upsilon_\kappa + m_2\upsilon_\kappa$ ή

$$m\upsilon_0 = 2m\upsilon_\kappa + m\upsilon_\kappa \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_0}{3}$$

20.85) α) Για τη σφαίρα Σ_3 ισχύει:

$\Sigma F = F_1 - F_2 = G\dfrac{m_1m_3}{\ell^2} - G\dfrac{m_2m_3}{\ell^2} = 0$, άρα αρχικά δε θα κινηθεί η σφαίρα Σ_3.



$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = 0$, και από την αρχή διατήρησης της ορμής $\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$, άρα:

$$m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \quad \acute{\eta} \quad \upsilon_1 = \upsilon_2$$

Δηλαδή, οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 θα απέχουν συνέχεια εξίσου από τη σφαίρα Σ_3 και επομένως αυτή θα παραμένει συνεχώς ακίνητη.

β) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \acute{\eta}$$

$$0 - G\frac{m_1m_2}{2\ell} - G\frac{m_1m_3}{\ell} - G\frac{m_2m_3}{\ell} =$$

$$= K_{\tau\varepsilon\lambda} - G\frac{m_1m_2}{\ell} - G\frac{m_1m_3}{\frac{\ell}{2}} - G\frac{m_2m_3}{\frac{\ell}{2}} \quad \acute{\eta}$$

$$-G\left(\frac{m^2}{2\ell} + \frac{2m^2}{\ell} + \frac{2m^2}{\ell}\right) = K_{\tau\varepsilon\lambda} - G\left(\frac{m^2}{\ell} + \frac{4m^2}{\ell} + \frac{4m^2}{\ell}\right) \quad \acute{\eta}$$

$$-G\frac{9m^2}{2\ell} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - G\frac{9m^2}{\ell} \quad \acute{\eta} \quad K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{9}{2}G\frac{m^2}{\ell}$$

Κριτήριο Αξιολόγησης

Θέμα 1ο

α) i-Λ, ii-Λ, iii-Σ

β) i-Λ, ii-Λ, iii-Σ

Θέμα 2ο

α) ii: $g_\Gamma = \dfrac{g_B}{36}$ ή $\dfrac{g_\Gamma}{g_B} = \dfrac{1}{36}$ ή $\dfrac{G\dfrac{m_1}{r_\Gamma^2}}{G\dfrac{m_1}{r_B^2}} = \dfrac{1}{36}$ ή

$$\frac{r_B^2}{r_\Gamma^2} = \frac{1}{36} \quad \acute{\eta} \quad r_\Gamma = 6r_B$$

$$\frac{U_B}{U_\Gamma} = \frac{-G\dfrac{m_1m_2}{r_B}}{-G\dfrac{m_1m_2}{r_\Gamma}} = \frac{r_\Gamma}{r_B} = 6$$

β) iii: $\dfrac{V_\Gamma}{V_B} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ή $\dfrac{G\dfrac{m_1}{A\Gamma}}{G\dfrac{m_1}{AB}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ή $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ή

$$\frac{1}{\eta\mu\varphi} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \acute{\eta} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

Θέμα 3ο

α) $g_2 = 72g_1$ ή $G\dfrac{m_2}{\left(\dfrac{d}{5}\right)^2} = 72G\dfrac{m_1}{\left(d + \dfrac{d}{5}\right)^2}$ ή

$$25m_2 = 72\cdot\frac{25}{36}m_1 \quad \acute{\eta} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

β) $F = G\dfrac{m_1m_2}{d^2}$ ή $F = G\dfrac{2m_1^2}{d^2}$ ή $m_1 = d\sqrt{\dfrac{F}{2G}}$ ή

$m_1 = 2kg$ και $m_2 = 4kg$

γ) $V_\Gamma = V_{\Gamma_1} + V_{\Gamma_2} = -G\dfrac{m_1}{\left(d+\dfrac{d}{5}\right)} - G\dfrac{m_2}{\dfrac{d}{5}} =$

$= -G\left(\dfrac{5m_1}{6d} + \dfrac{5m_2}{d}\right) = -72,583\cdot 10^{-11} J/kg$

Θέμα 4ο

α) $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m_1υ_0 = m_1υ_1 - m_2υ_2$ ή

$m_1υ_0 = m_1\cdot 4υ_2 - 3m_1υ_2$ ή $υ_0 = υ_2$ και $υ_1 = 4υ_0$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$\dfrac{1}{2}m_1υ_0^2 = \dfrac{1}{2}m_1υ_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2υ_2^2 - G\dfrac{m_1m_2}{\ell}$ ή

$\dfrac{1}{2}m_1υ_0^2 = \dfrac{1}{2}m_1\cdot 16υ_0^2 + \dfrac{1}{2}\cdot 3m_1\cdot υ_0^2 - G\dfrac{3m_1^2}{\ell}$ ή

$-9m_1υ_0^2 = -G\dfrac{3m_1^2}{\ell}$ ή $\ell = \dfrac{-3Gm_1^2}{-9m_1υ_0^2}$ ή $\ell = \dfrac{Gm_1}{3υ_0^2}$

β) $U = -G\dfrac{m_1m_2}{\ell} = -G\dfrac{3m_1^2}{\dfrac{Gm_1}{3υ_0^2}} =$

$= -\dfrac{3Gm_1^2\cdot 3υ_0^2}{Gm_1} = -9m_1υ_0^2$

γ) $F = G\dfrac{m_1m_2}{\ell^2} = G\dfrac{3m_1^2}{\dfrac{G^2m_1^2}{9υ_0^4}} = \dfrac{27Gm_1^2υ_0^4}{G^2m_1^2} = \dfrac{27υ_0^4}{G}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

Ερωτήσεις θεωρίας

21.11) Βλέπε 21.2

21.12) $g = G\dfrac{M_\Gamma}{(2R_\Gamma)^2}$ ή $g = \dfrac{1}{4}G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$ ή $g = \dfrac{1}{4}g_0$

21.13) $|V| = \left|-G\dfrac{M_\Gamma}{3R_\Gamma}\right|$ ή $|V| = \dfrac{1}{3}\left|-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right|$ ή $|V| = \dfrac{1}{3}|V_0|$

21.14) $υ_δ = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$ ή $υ_δ = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{4R_\Gamma}}$ ή

$υ_δ = \sqrt{\dfrac{2g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}}$ ή $υ_δ = \sqrt{\dfrac{g_0R_\Gamma}{2}}$

21.15) Βλέπε 21.4

21.16) Μία μαύρη τρύπα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη, αλλά γίνεται αντιληπτή από τις ισχυρότατες βαρυτικές έλξεις που ασκεί στον περίγυρό της.

21.17) Βλέπε 21.4

21.18) Στους τεχνητούς δορυφόρους ασκείται δύναμη τριβής που αντιστέκεται στην κίνησή της, επειδή ακόμη και στα μεγάλα ύψη η πυκνότητα της ατμόσφαιρας δεν είναι μηδέν.

21.19) $B = F_κ$ ή $mg = mα_κ$ ή $α_κ = g$ ή $α_κ = \dfrac{g_0}{4}$

21.20) Η ταχύτητα κάθε δορυφόρου υπολογίζεται από τη σχέση:

$B = F_κ$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m}{r^2} = m\dfrac{υ^2}{r}$ ή $υ = \sqrt{G\dfrac{M_\Gamma}{r}}$

Από τη σχέση $υ_2 > υ_1$ έχουμε:

$\sqrt{G\dfrac{M_\Gamma}{r_2}} > \sqrt{G\dfrac{M_\Gamma}{r_1}}$ ή $r_2 < r_1$

Επομένως, οι δύο δορυφόροι περιφέρονται σε διαφορετικές τροχιές και έτσι αποκλείεται να συγκρουστούν.

21.21) Για να απομακρυνθεί ένα διαστημόπλοιο από κάποιον πλανήτη, απαιτείται ταχύτητα διαφυγής μόνο όταν πρόκειται για πτήση που δεν τροφοδοτείται με ισχύ. Εάν το διαστημόπλοιο τροφοδοτείται συνεχώς με ισχύ, μπορεί να διανύσει οποιαδήποτε απόσταση από τη Γη με οποιαδήποτε ταχύτητα πάνω από το μηδέν, φτάνει να έχει καύσιμα και χρόνο.

21.22) Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης θα μειώνεται μέχρι το σημείο όπου θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και μετά θα αυξάνεται, επειδή η έλξη της Σελήνης είναι μεγαλύτερη από την έλξη της Γης.

21.23) Η δύναμη που ασκεί ο Ήλιος στη Σελήνη παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

21.24) Όχι, επειδή το κανόνι δεν μπορεί να δώσει ταχύτητα εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

21.25) α

21.26) γ

21.27) α

21.28) γ

21.29) γ

21.30) γ

21.31) α

21.32) α, β, γ

21.33) β, γ

21.34) γ

21.35) α

21.36) α

Ερωτήσεις κατανόησης

21.37) β: $\dfrac{F'}{F}=\dfrac{G\dfrac{mM_\Gamma}{(2R_\Gamma)^2}}{G\dfrac{mM_\Gamma}{R_\Gamma^2}}$ ή $\dfrac{F'}{F}=\dfrac{1}{4}$ ή $F'=0,25N$

21.38) γ: $\dfrac{B'}{B}=\dfrac{G\dfrac{mM_\Gamma}{(1,2R_\Gamma)^2}}{G\dfrac{mM_\Gamma}{R_\Gamma^2}}$ ή $\dfrac{B'}{B}=\dfrac{1}{1,44}$ ή $\dfrac{B'}{B}=\dfrac{25}{36}$ ή

$B'=\dfrac{25}{36}B$

21.39) α: $\dfrac{B'}{B}=\dfrac{G\dfrac{mM'_\Gamma}{R'^2_\Gamma}}{G\dfrac{mM_\Gamma}{R_\Gamma^2}}=\dfrac{M'_\Gamma R_\Gamma^2}{M_\Gamma R'^2_\Gamma}=\dfrac{\rho V' R_\Gamma^2}{\rho V R'^2_\Gamma}=$

$=\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R'^3_\Gamma\cdot R_\Gamma^2}{\dfrac{4}{3}\pi R_\Gamma^3\cdot R'^2_\Gamma}=\dfrac{R'_\Gamma}{R_\Gamma}=\dfrac{\dfrac{9}{10}R_\Gamma}{R_\Gamma}=\dfrac{9}{10}$

21.40) α: $\dfrac{g}{g_0}=\dfrac{G\dfrac{M_\Gamma}{(3R_\Gamma)^2}}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}=\dfrac{1}{9}$ ή $g=\dfrac{g_0}{9}$

21.41) β: $\dfrac{g}{g_0}=\dfrac{G\dfrac{M_\Gamma}{(60R_\Gamma)^2}}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}=\dfrac{1}{3.600}$ ή $g=\dfrac{g_0}{3.600}$

21.42) α: $g_\Gamma=4g_\Sigma$ ή $G\dfrac{M_\Gamma}{d'^2}=4G\dfrac{M_\Sigma}{(d-d')^2}$ ή

$\dfrac{4d'^2}{(d-d')^2}=\dfrac{M_\Gamma}{M_\Sigma}$ ή $\dfrac{d'^2}{(d-d')^2}=\dfrac{81}{4}$ ή $\dfrac{d'}{d-d'}=\pm\dfrac{9}{2}$

Άρα: $2d'=9d-9d'$ ή $11d'=9d$ ή $d'=\dfrac{9d}{11}$ και

$2d'=-9d+9d'$ ή $-7d'=-9d$ ή $d'=\dfrac{9d}{7}$

(απορρίπτεται, επειδή είναι εκτός του ευθύγραμμου τμήματος)

21.43) γ: $\dfrac{V}{V_0}=\dfrac{-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h}}{-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}}=\dfrac{R_\Gamma}{4R_\Gamma}=\dfrac{1}{4}$ ή $V=\dfrac{V_0}{4}$

21.44) α: Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_B$ ή $0-\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2=m(V_0-V)$ ή

$-\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2=m\left(-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}+G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_{max}}\right)$ ή

$G\dfrac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}=2G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}-2G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_{max}}$ ή

$\dfrac{1}{4R_\Gamma}-\dfrac{2}{R_\Gamma}=-\dfrac{2}{R_\Gamma+h_{max}}$ ή $\dfrac{7}{4R_\Gamma}=\dfrac{2}{R_\Gamma+h_{max}}$ ή

$7R_\Gamma+7h_{max}=8R_\Gamma$ ή $h_{max}=\dfrac{R_\Gamma}{7}$

21.45) β: Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_B$ ή

$\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\upsilon_\delta}{4}\right)^2-\dfrac{1}{2}m\upsilon_\delta^2=m(V_0-V)$ ή

$\dfrac{1}{32}m\upsilon_\delta^2-\dfrac{1}{2}m\upsilon_\delta^2=m\left(-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}+G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h}\right)$ ή

$\upsilon_\delta^2-16\upsilon_\delta^2=32GM_\Gamma\left(\dfrac{1}{R_\Gamma+h}-\dfrac{1}{R_\Gamma}\right)$ ή

$-15\cdot\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}=-32GM_\Gamma\left(\dfrac{1}{R_\Gamma}-\dfrac{1}{R_\Gamma+h}\right)$ ή

$$\frac{30}{R_\Gamma}=\frac{32}{R_\Gamma}-\frac{32}{R_\Gamma+h} \quad ή \quad \frac{32}{R_\Gamma+h}=\frac{2}{R_\Gamma} \quad ή \quad h=15R_\Gamma$$

Άρα: $V=-G\dfrac{M_\Gamma}{16R_\Gamma}$

21.46) α: $g_0=G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$ ή $GM_\Gamma=g_0R_\Gamma^2$

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}=\sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma}}=\sqrt{2g_0R_\Gamma}$$

21.47) γ: $V_0=-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$ ή $GM_\Gamma=-V_0R_\Gamma$

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}=\sqrt{\frac{-2V_0R_\Gamma}{R_\Gamma}}=\sqrt{-2V_0}$$

21.48) β: Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_w \quad ή \quad 0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=m\left(V_0-V\right) \quad ή$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=m\left(-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}-V\right) \quad ή \quad \frac{1}{2}\upsilon_0^2=G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}+V \quad ή$$

$$V=\frac{1}{2}\upsilon_0^2-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma} \quad ή \quad V=\frac{1}{2}G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma} \quad ή$$

$$V=-G\frac{M_\Gamma}{8R_\Gamma}$$

Άρα: $8R_\Gamma=R_\Gamma+h$ ή $h=7R_\Gamma$

$$g=G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma+h\right)^2} \quad ή \quad g=G\frac{M_\Gamma}{64R_\Gamma^2}$$

21.49) α: $V_B=-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_B}$, άρα: $h_B=3R_\Gamma$

$$g_0=G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \quad ή \quad GM_\Gamma=g_0R_\Gamma^2$$

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h_B}}=\sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}}=\frac{\sqrt{2g_0R_\Gamma}}{2}$$

21.50) γ: $B=G\dfrac{M_\Gamma m}{\left(R_\Gamma+h\right)^2}=G\dfrac{M_\Gamma m}{100R_\Gamma^2}$

$$F_\kappa=B \quad ή \quad m\alpha_\kappa=B \quad ή \quad \alpha_\kappa=G\frac{M_\Gamma}{100R_\Gamma^2} \quad (1)$$

$$g_0=G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\alpha_\kappa=\frac{g_0}{100}$$

21.51) α: $F_\kappa=B$ ή $m\dfrac{\upsilon^2}{R_\Gamma+h}=G\dfrac{mM_\Gamma}{\left(R_\Gamma+h\right)^2}$ ή

$$\upsilon=\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}$$

$$\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}=\upsilon\sqrt{2} \quad ή \quad \frac{\upsilon}{\upsilon_\delta}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

21.52) γ: Εάν m_H, m_π οι μάζες του Ήλιου και του πλανήτη, έχουμε:

$$F=F_\kappa \quad ή \quad G\frac{m_Hm_\pi}{r^2}=m_\pi\frac{\upsilon^2}{r} \quad ή \quad G\frac{m_H}{r}=\upsilon^2 \quad ή$$

$$G\frac{m_H}{r}=\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \quad ή \quad G\frac{m_H}{r}=\frac{4\pi^2r^2}{T^2} \quad ή \quad T^2=\frac{4\pi^2}{Gm_H}r^3 \quad ή$$

$$T^2=\sigma\tau\alpha\theta r^3$$

Επειδή το T^2 είναι ανάλογο του r^3, η γραφική παράσταση είναι ευθεία.

21.53) β: Εφόσον ο δορυφόρος βρίσκεται συνεχώς πάνω από το ίδιο σημείο, η περίοδος περιφοράς του είναι ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης T_Γ γύρω από τον άξονά της.

$$F_\kappa=F \quad ή \quad m\omega^2r=G\frac{mM_\Gamma}{r^2} \quad ή \quad \omega^2=G\frac{M_\Gamma}{r^3} \quad ή$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_\Gamma}\right)^2=G\frac{M_\Gamma}{r^3} \quad ή \quad \frac{4\pi^2}{T_\Gamma^2}=\frac{GM_\Gamma}{r^3} \quad ή$$

$$r^3=G\frac{M_\Gamma T_\Gamma^2}{4\pi^2}=\frac{g_0R_\Gamma^2T_\Gamma^2}{4\pi^2} \quad ή \quad r=\sqrt[3]{\frac{R_\Gamma^2T_\Gamma^2g_0}{4\pi^2}}$$

21.54) β: $F_\kappa=F$ ή $m\dfrac{\upsilon^2}{r}=G\dfrac{mM_\Gamma}{r^2}$ ή $\upsilon^2=G\dfrac{M_\Gamma}{r}$

Όταν ο δορυφόρος περιφέρεται σε τροχιά ακτίνας r_1, ισχύει:

$$E_1=K+U=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-G\frac{mM_\Gamma}{r_1}=$$

$$=\frac{1}{2}mG\frac{M_\Gamma}{r_1}-G\frac{mM_\Gamma}{r_1}=-G\frac{mM_\Gamma}{2r_1} \quad ή \quad E_1=-G\frac{mM_\Gamma}{4R_\Gamma}$$

Ομοίως, όταν ο δορυφόρος περιφέρεται σε τροχιά ακτίνας r_2, έχει ενέργεια:

$$E_2 = -G\frac{mM_\Gamma}{2r_2} = -G\frac{mM_\Gamma}{12R_\Gamma}$$

$$E = E_2 - E_1 = -G\frac{mM_\Gamma}{12R_\Gamma} + G\frac{mM_\Gamma}{4R_\Gamma} =$$

$$= G\frac{mM_\Gamma}{6R_\Gamma} = \frac{mg_0R_\Gamma^2}{6R_\Gamma} = \frac{mg_0R_\Gamma}{6}$$

21.55) α: $F_\kappa = F$ ή $\frac{m\upsilon^2}{r} = G\frac{mM_\Gamma}{r^2}$ ή $\upsilon^2 = \frac{GM_\Gamma}{r}$ ή

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}$$

Για τον δορυφόρο Δ_1 έχουμε:

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{\upsilon_1} = \frac{2\pi(R_\Gamma + h_1)}{\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}}} = \frac{2\pi\sqrt{(R_\Gamma + h_1)^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}} =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{64R_\Gamma^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}}$$

Ομοίως για τον δορυφόρο Δ_2 ισχύει:

$$T_2 = \frac{2\pi\sqrt{(R_\Gamma + h_2)^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}} = \frac{2\pi\sqrt{729R_\Gamma^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}}$$

Επομένως: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{729}} = \frac{8}{27}$

Ασκήσεις

21.56) α) $F_1 = G\frac{mM_\Gamma}{(3R_\Gamma)^2} = \frac{1}{9}G\frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma^2} = \frac{1}{9}F_0 = 90N$

β) $F_2 = G\frac{mM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = G\frac{mM_\Gamma}{(4R_\Gamma)^2} = \frac{1}{16}G\frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma^2} =$

$$= \frac{1}{16}F_0 = 50{,}625N$$

21.57) α) $g_1 = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h_1)^2} = \frac{GM_\Gamma}{100R_\Gamma^2} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{100R_\Gamma^2} =$

$$= \frac{g_0}{100} = 0{,}1m/s^2$$

β) $V_1 = -G\frac{M_\Gamma}{h_1 + R_\Gamma} = -\frac{g_0R_\Gamma^2}{10R_\Gamma} = -\frac{g_0R_\Gamma}{10} = -6{,}4\cdot 10^6 J/kg$

γ) $g_2 = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h_2)^2} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{25R_\Gamma^2} = 0{,}4m/s^2$

$$\pi_g\% = \frac{g_2 - g_1}{g_1}100\% = 300\%$$

21.58) α) $g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2}$ ή

$$\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)^2 = \frac{g}{g_0} \quad ή \quad \left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right)^2 = 0{,}25 \quad ή$$

$\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h} = -0{,}5$ (απορρίπτεται) και

$\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h} = 0{,}5$ ή $h = R_\Gamma = 6.400km$

β) $V = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} = -\frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} = -\frac{g_0R_\Gamma}{2} = -3{,}2\cdot 10^7 J/kg$

γ) $V_0 = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} = -\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = -g_0R_\Gamma = -6{,}4\cdot 10^7 J/kg$

$$W_F = m(V - V_0) = 3{,}2\cdot 10^{10} J$$

21.59) α) $g_1 = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h_1)^2} = G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma^2}$ και

$$g_2 = G\frac{M_\Sigma}{(R_\Sigma + h_2)^2} = G\frac{M_\Sigma}{9R_\Sigma^2}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{G\frac{M_\Sigma}{9R_\Sigma^2}}{G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma^2}} = \frac{4M_\Sigma R_\Gamma^2}{9M_\Gamma R_\Sigma^2} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{484}{6.561} \quad ή$$

$$g_2 \simeq 0{,}073g_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-G\frac{M_\Sigma}{3R_\Sigma}}{-G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}} = \frac{2M_\Sigma R_\Gamma}{3M_\Gamma R_\Sigma} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{11}{3} = \frac{22}{729} \quad ή$$

$$V_2 \simeq 0{,}03V_1$$

β) $\frac{B_\Sigma}{B_\Gamma} = \frac{G\frac{mM_\Sigma}{9R_\Sigma^2}}{G\frac{mM_\Gamma}{4R_\Gamma^2}} = \frac{4M_\Sigma R_\Gamma^2}{9M_\Gamma R_\Sigma^2} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{484}{6.561}$ ή

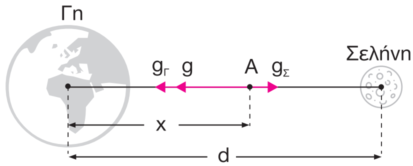
$$B_\Gamma \simeq 13{,}56B_\Sigma$$

21.60) α) Έστω ότι στο σημείο Α ισχύει $g=\dfrac{8g_\Gamma}{9}$.

$$g=g_\Gamma-g_\Sigma \quad ή \quad \frac{8}{9}g_\Gamma=g_\Gamma-g_\Sigma \quad ή \quad g_\Sigma=\frac{1}{9}g_\Gamma \quad ή$$

$$G\frac{M_\Sigma}{(d-x)^2}=\frac{1}{9}G\frac{M_\Gamma}{x^2} \quad ή \quad \frac{x^2}{(d-x)^2}=\frac{1}{9}\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} \quad ή$$

$$\frac{x^2}{(d-x)^2}=9 \quad ή \quad \frac{x}{d-x}=\pm 3$$



Άρα: $x=3d-3x$ ή $x=\dfrac{3d}{4}$ και

$x=-3d+3x$ ή $x=\dfrac{3d}{2}$ (απορρίπτεται)

β) Έστω ότι το σημείο όπου $g=0$ απέχει x_1 από το κέντρο της Γης.

$$g=0 \quad ή \quad g_\Gamma=g_\Sigma \quad ή \quad G\frac{M_\Gamma}{x_1^2}=G\frac{M_\Sigma}{(d-x_1)^2} \quad ή$$

$$\frac{x_1^2}{(d-x_1)^2}=\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma} \quad ή \quad \frac{x_1}{d-x_1}=\pm 9$$

Άρα: $x_1=9d-9x_1$ ή $x_1=\dfrac{9d}{10}$ και

$x_1=-9d+9x_1$ ή $x_1=\dfrac{9d}{8}$ (απορρίπτεται)

γ) Έστω ότι το σημείο Β απέχει x_2 από το κέντρο της Γης.

$$\frac{V_\Gamma}{V_\Sigma}=\frac{81}{7} \quad ή \quad \frac{-G\dfrac{M_\Gamma}{x_2}}{-G\dfrac{M_\Sigma}{d-x_2}}=\frac{81}{7} \quad ή \quad \frac{d-x_2}{x_2}\cdot\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}=\frac{81}{7} \quad ή$$

$$\frac{d-x_2}{x_2}=\frac{1}{7} \quad ή \quad 7d-7x_2=x_2 \quad ή \quad x_2=\frac{7d}{8}$$

21.61) α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος πρώτα στη Σελήνη και μετά στη Γη:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{B_\Sigma} \quad ή \quad 0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=-mg_\Sigma s_\Sigma ημφ_\Sigma \quad ή$$

$$s_\Sigma=\frac{\upsilon_0^2}{2g_\Sigma ημφ_\Sigma}$$

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{B_\Gamma} \quad ή \quad 0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=-mg_\Gamma s_\Gamma ημφ_\Gamma \quad ή$$

$$s_\Gamma=\frac{\upsilon_0^2}{2g_\Gamma ημφ_\Gamma}$$

Επομένως: $\dfrac{s_\Gamma}{s_\Sigma}=\dfrac{2g_\Sigma ημφ_\Sigma}{2g_\Gamma ημφ_\Gamma}$ ή $\dfrac{s_\Gamma}{s_\Sigma}=\dfrac{G\dfrac{M_\Sigma}{R_\Sigma^2}ημφ_\Sigma}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}ημφ_\Gamma}$ ή

$$\frac{s_\Gamma}{s_\Sigma}=\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\cdot\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}\right)^2\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \quad ή \quad \frac{s_\Gamma}{s_\Sigma}=\frac{1}{81}\cdot\frac{121}{9}\cdot\sqrt{3} \quad ή$$

$$s_\Gamma=\frac{\sqrt{3}}{4}m$$

β) $\dfrac{s_\Gamma}{s'_\Sigma}=\dfrac{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}ημφ_\Gamma}{G\dfrac{M_\Sigma}{R_\Sigma^2}ημφ'_\Sigma}$ ή $\dfrac{s_\Gamma}{s'_\Sigma}=\dfrac{M_\Gamma}{M_\Sigma}\cdot\left(\dfrac{R_\Sigma}{R_\Gamma}\right)^2\dfrac{\frac{1}{2}}{ημφ'_\Sigma}$ ή

$$ημφ'_\Sigma=\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}\cdot\left(\frac{R_\Sigma}{R_\Gamma}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{s'_\Sigma}{s_\Gamma} \quad ή$$

$$ημφ'_\Sigma=81\cdot\frac{9}{121}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{121}{729} \quad ή \quad ημφ'_\Sigma=\frac{1}{2} \quad ή \quad φ'_\Sigma=30°$$

21.62) α) Από τη σχέση $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ έχουμε:

$$t_\Gamma=\sqrt{\frac{2h}{g_\Gamma}} \quad \text{και} \quad t_\Sigma=\sqrt{\frac{2h}{g_\Sigma}}$$

Άρα: $\dfrac{t_\Gamma}{t_\Sigma}=\sqrt{\dfrac{g_\Sigma}{g_\Gamma}}=\sqrt{\dfrac{G\dfrac{M_\Sigma}{R_\Sigma^2}}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}}=\sqrt{\dfrac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\cdot\left(\dfrac{R_\Gamma}{R_\Sigma}\right)^2}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{11}{3}=\dfrac{11}{27}$

β) Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_B \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=mgh \quad ή$$

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}$$

Άρα: $\dfrac{\upsilon_\Gamma}{\upsilon_\Sigma}=\dfrac{\sqrt{\upsilon_0^2+2g_\Gamma h}}{\sqrt{\upsilon_0^2+2g_\Sigma h}}$ (1)

Επειδή $g_\Gamma>g_\Sigma$, από τη σχέση (1) προκύπτει: $\upsilon_\Gamma>\upsilon_\Sigma$

γ) Από τη σχέση $s=\upsilon_0 t$ έχουμε:

$$s_\Gamma=\upsilon_0\sqrt{\frac{2h}{g_\Gamma}} \quad \text{και} \quad s_\Sigma=\upsilon_0\sqrt{\frac{2h}{g_\Sigma}}$$

Άρα: $\dfrac{s_\Gamma}{s_\Sigma}=\sqrt{\dfrac{g_\Sigma}{g_\Gamma}}=\dfrac{11}{27}$

21.63) α) $\dfrac{M_O}{M_\Sigma}=\dfrac{V_O\rho_O}{V_\Sigma\rho_\Sigma}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_O^3\cdot\rho_O}{\frac{4}{3}\pi R_\Sigma^3\cdot\rho_\Sigma}=$

$=\left(\dfrac{R_O}{R_\Sigma}\right)^3\cdot\dfrac{\rho_O}{\rho_\Sigma}=\left(\dfrac{2R_\Sigma}{R_\Sigma}\right)^3\cdot\dfrac{3\rho_\Sigma}{\rho_\Sigma}=24$

$\dfrac{F_2}{F_1}=\dfrac{G\dfrac{M_O m}{R_O^2}}{G\dfrac{M_\Sigma m}{R_\Sigma^2}}=\dfrac{M_O}{M_\Sigma}\cdot\left(\dfrac{R_\Sigma}{R_O}\right)^2=6$ ή $F_2=600N$

β) $\dfrac{\upsilon_{\delta_1}}{\upsilon_{\delta_2}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2GM_\Sigma}{R_\Sigma}}}{\sqrt{\dfrac{2GM_O}{R_O}}}=\sqrt{\dfrac{M_\Sigma}{M_O}\cdot\dfrac{R_O}{R_\Sigma}}=\sqrt{\dfrac{1}{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

21.64) α) $\dfrac{U_1}{U_2}=\dfrac{-G\dfrac{M_\Gamma m}{R_\Gamma+h_1}}{-G\dfrac{M_\Gamma m}{R_\Gamma+h_2}}=\dfrac{R_\Gamma+h_2}{R_\Gamma+h_1}=\dfrac{5}{4}$

β) Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$K_2-K_1=W_B$ ή $0-\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2=m\left(V_1-V_2\right)$ ή

$\upsilon_0^2=-2\left(-G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_1}+G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_2}\right)$ ή

$\upsilon_0^2=2\left(\dfrac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma}-\dfrac{GM_\Gamma}{5R_\Gamma}\right)$ ή $\upsilon_0^2=2g_0R_\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4R_\Gamma}-\dfrac{1}{5R_\Gamma}\right)$ ή

$\upsilon_0^2=\dfrac{g_0R_\Gamma}{10}$ ή $\upsilon_0=800\sqrt{10}m/s$

γ) Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$K_3-K_1=W_B$ ή $\dfrac{1}{2}m\upsilon_3^2-\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2=m\left(V_1-V_3\right)$ ή

$\upsilon_3^2-\upsilon_0^2=2\left(-G\dfrac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}+G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h_3}\right)$ ή

$\upsilon_3^2-\upsilon_0^2=2g_0R_\Gamma^2\left(\dfrac{1}{R_\Gamma+h_3}-\dfrac{1}{4R_\Gamma}\right)$ ή

$\dfrac{1}{R_\Gamma+h_3}-\dfrac{1}{4R_\Gamma}=\dfrac{\upsilon_3^2-\upsilon_0^2}{2g_0R_\Gamma^2}$ ή $\dfrac{1}{R_\Gamma+h_3}=\dfrac{\upsilon_3^2-\upsilon_0^2}{2g_0R_\Gamma^2}+\dfrac{1}{4R_\Gamma}$ ή

$\dfrac{1}{R_\Gamma+h_3}=\dfrac{8}{9}\dfrac{1}{256\cdot10^5}$ ή $9\cdot256\cdot10^5=8R_\Gamma+8h_3$ ή

$h_3=224\cdot10^5m=\dfrac{7R_\Gamma}{2}$

21.65) α) $\dfrac{M_A}{M_\Gamma}=\dfrac{11}{100}$ ή $\dfrac{V_A\rho_A}{V_\Gamma\rho_\Gamma}=\dfrac{11}{100}$ ή

$\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_A^3\rho_A}{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3\rho_\Gamma}=\dfrac{11}{100}$ ή $\dfrac{\rho_A}{\rho_\Gamma}=\dfrac{11}{100}\cdot\left(\dfrac{R_\Gamma}{R_A}\right)^3$ ή $\dfrac{\rho_A}{\rho_\Gamma}=\dfrac{11}{100}\cdot2^3$

ή $\dfrac{\rho_A}{\rho_\Gamma}=\dfrac{88}{100}=\dfrac{22}{25}$

β) $\dfrac{g_A}{g_\Gamma}=\dfrac{G\dfrac{M_A}{R_A^2}}{G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}=\dfrac{M_A}{M_\Gamma}\cdot\left(\dfrac{R_\Gamma}{R_A}\right)^2=\dfrac{11}{100}\cdot2^2=\dfrac{44}{100}=\dfrac{11}{25}$

γ) $\dfrac{\upsilon_{\delta_A}}{\upsilon_{\delta_\Gamma}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{2GM_A}{R_A}}}{\sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}}=\sqrt{\dfrac{M_A}{M_\Gamma}\cdot\dfrac{R_\Gamma}{R_A}}=\dfrac{\sqrt{22}}{10}$

21.66) α) $\dfrac{F_A}{F_\Gamma}=\dfrac{G\dfrac{M_H M_A}{d_A^2}}{G\dfrac{M_H M_\Gamma}{d_\Gamma^2}}=\dfrac{M_A}{M_\Gamma}\cdot\dfrac{d_\Gamma^2}{d_A^2}\simeq\dfrac{11}{225}$

β) $F_\kappa=F_A$ ή $M_A\dfrac{\upsilon_A^2}{d_A}=G\dfrac{M_H M_A}{d_A^2}$ ή $\upsilon_A=\sqrt{\dfrac{GM_H}{d_A}}$ και

ομοίως: $\upsilon_\Gamma=\sqrt{\dfrac{GM_H}{d_\Gamma}}$

Άρα: $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma}=\sqrt{\dfrac{d_\Gamma}{d_A}}\simeq\sqrt{\dfrac{1}{1,5}}\simeq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

γ) $\dfrac{\alpha_{\kappa_A}}{\alpha_{\kappa_\Gamma}}=\dfrac{\dfrac{\upsilon_A^2}{d_A}}{\dfrac{\upsilon_\Gamma^2}{d_\Gamma}}=\dfrac{\upsilon_A^2}{\upsilon_\Gamma^2}\cdot\dfrac{d_\Gamma}{d_A}\simeq\dfrac{4}{9}$

δ) $\dfrac{T_A}{T_\Gamma}=\dfrac{\dfrac{2\pi d_A}{\upsilon_A}}{\dfrac{2\pi d_\Gamma}{\upsilon_\Gamma}}=\dfrac{d_A}{d_\Gamma}\cdot\dfrac{\upsilon_\Gamma}{\upsilon_A}\simeq\dfrac{4,5\sqrt{6}}{6}=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

21.67) α) Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση όπου $r=2R_\Gamma$ έως την επιφάνεια της Γης, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\left(-G\frac{mM_\Gamma}{2R_\Gamma}\right)=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\left(-G\frac{mM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) \text{ ή}$$

$$\upsilon^2=\upsilon_1^2+\frac{2GM_\Gamma}{2R_\Gamma}-\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma} \text{ ή}$$

$$\upsilon^2=\upsilon_1^2+\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma}-\frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon^2=\upsilon_1^2-g_0R_\Gamma \text{ ή}$$

$$\upsilon=10^4 m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από το άπειρο έως την επιφάνεια της Γης:

$$\frac{1}{2}m\upsilon'^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon'^2=\upsilon_1^2-2g_0R_\Gamma \text{ ή}$$

$$\upsilon'=\sqrt{\upsilon_1^2-2g_0R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon'=6\cdot10^3 m/s$$

21.68) α) $F_\kappa=F$ ή $m\frac{\upsilon^2}{r}=G\frac{M_\Gamma m}{r^2}$ ή

$$m\upsilon^2=G\frac{M_\Gamma m}{r} \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon^2=G\frac{M_\Gamma m}{2r} \text{ ή } K=G\frac{M_\Gamma m}{2r} \quad (1)$$

$$U=-G\frac{M_\Gamma m}{r} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$E=K+U \text{ ή } E=-G\frac{M_\Gamma m}{2r}$$

Άρα: $K=-E$

β) $\frac{U}{E}=\frac{-G\frac{M_\Gamma m}{r}}{-G\frac{M_\Gamma m}{2r}}=2$ ή $U=2E$

γ) $K=-E$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2=-E$ ή $\upsilon=\sqrt{-\frac{2E}{m}}$

Προβλήματα

21.69) α) $\frac{g_1}{g_0}=\frac{G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma+h_1)^2}}{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}=\frac{R_\Gamma^2}{16R_\Gamma^2}=\frac{1}{16}$

β) $F_\kappa=mg_1$ ή $m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma+h_1}=mG\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma+h_1)^2}$ ή

$$\upsilon^2=\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h_1} \text{ ή } \upsilon^2=\frac{g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} \text{ ή } \upsilon=\frac{\sqrt{g_0R_\Gamma}}{2}$$

$$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1 \text{ ή } \Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_2+(-\vec{\upsilon}_1) \text{ ή}$$

$$\Delta\upsilon=\sqrt{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+2\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή}$$

$$\Delta\upsilon=\sqrt{2\upsilon^2+2\upsilon^2\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή}$$

$$\frac{\sqrt{2g_0R_\Gamma}}{2}=\sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{2}} \text{ ή } \frac{1}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\varphi=0 \text{ ή}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}rad \text{ ή } \varphi=\frac{3\pi}{2}rad$$

Ο ελάχιστος χρόνος είναι: $t_{min}=\frac{T}{4}$

$$T=\frac{2\pi(R_\Gamma+h_1)}{\upsilon} \text{ ή } T=\frac{16\pi R_\Gamma}{\sqrt{g_0R_\Gamma}}$$

γ) $K_1=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\frac{g_0R_\Gamma}{4}=\frac{mg_0R_\Gamma}{8}$

Από ΑΔΕΤ έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}+E_1=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$0-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}+E_1=0-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma+h_1} \text{ ή}$$

$$E_1=-G\frac{M_\Gamma m}{4R_\Gamma}+G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \text{ ή}$$

$$E_1=\frac{3}{4}\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma}=\frac{3}{4}\frac{g_0R_\Gamma^2 m}{R_\Gamma}=\frac{3}{4}g_0R_\Gamma m$$

Άρα: $\frac{K_1}{E_1}=\frac{\frac{mg_0R_\Gamma}{8}}{\frac{3}{4}g_0R_\Gamma m}=\frac{1}{6}$

21.70) α) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ από h_1 έως h_2, έχουμε:

$$K_2-K_1=W_F \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=m(V_1-V_2) \text{ ή}$$

$$\upsilon_2^2=\upsilon_1^2+2(V_1-V_2) \text{ ή } \upsilon_2^2=\upsilon_1^2+2\left(-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}+G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) \text{ ή}$$

$$\upsilon_2^2=\upsilon_1^2+2GM_\Gamma\left(\frac{1}{2R_\Gamma}-\frac{1}{4R_\Gamma}\right) \text{ ή } \upsilon_2^2=\upsilon_1^2+2g_0R_\Gamma^2\frac{1}{4R_\Gamma}$$

$$\text{ή } \upsilon_2=\sqrt{\upsilon_1^2+\frac{g_0R_\Gamma}{2}}=\frac{10^4\sqrt{2}}{2}m/s$$

β) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ από h_1 έως την επιφάνεια της Γης, έχουμε:

$$K_3-K_1=W_F \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon_3^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=m(V_1-V_3) \text{ ή}$$

$$\upsilon_3^2 = \upsilon_1^2 + 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right) \quad ή$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2g_0R_\Gamma^2\left(\frac{1}{R_\Gamma} - \frac{1}{4R_\Gamma}\right)} \quad ή \quad \upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{3g_0R_\Gamma}{2}} \quad ή$$

$$\upsilon_3 \simeq 1{,}068 \cdot 10^4 m/s$$

γ) $F = F_\kappa$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2} = m\dfrac{\upsilon^2}{R_\Gamma + h_1}$ ή

$$\upsilon^2 = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h_1} \quad ή \quad \upsilon^2 = \frac{g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{g_0R_\Gamma} \quad ή$$

$$\upsilon = 4 \cdot 10^3 m/s$$

$$T = \frac{2\pi\left(R_\Gamma + h_1\right)}{\upsilon} \quad ή \quad T = \frac{8\pi R_\Gamma}{\upsilon} \quad ή \quad T = 1{,}28\pi \cdot 10^4 s$$

21.71) α) $F_1 = F_\kappa$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m_1}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2} = m_1\dfrac{\upsilon_1^2}{R_\Gamma + h_1}$ ή

$$\upsilon_1^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{9R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon_1 = \frac{1}{3}\sqrt{g_0R_\Gamma}$$

Ομοίως προκύπτει: $\upsilon_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{g_0R_\Gamma}$

Άρα: $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \dfrac{2}{3}$

β) $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\dfrac{2\pi\left(R_\Gamma + h_1\right)}{\upsilon_1}}{\dfrac{2\pi\left(R_\Gamma + h_2\right)}{\upsilon_2}} = \frac{9R_\Gamma \cdot \upsilon_2}{4R_\Gamma \cdot \upsilon_1} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$$

γ) Οι συχνότητες περιφοράς των δορυφόρων Δ_1, Δ_2 συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\dfrac{1}{T_1}}{\dfrac{1}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{27}$$

Επομένως, την πρώτη φορά που θα βρεθούν ξανά ταυτόχρονα στα σημεία Β και Γ ο Δ_1 θα έχει κάνει 8 περιφορές και ο Δ_2 27 περιφορές.

Άρα: $t_1 = 8T_1 = 8\dfrac{2\pi\left(R_\Gamma + h_1\right)}{\upsilon_1} = \dfrac{16\pi \cdot 9R_\Gamma}{\upsilon_1} =$

$$= \frac{144\pi \cdot R_\Gamma}{\dfrac{1}{3}\sqrt{g_0R_\Gamma}} = \frac{432\pi R_\Gamma}{\sqrt{g_0R_\Gamma}} = 3.456\pi \cdot 10^2 s$$

δ) $$\frac{\upsilon_{\delta_1}}{\upsilon_{\delta_2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}}}{\sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_2}}} = \frac{\sqrt{R_\Gamma + h_2}}{\sqrt{R_\Gamma + h_1}} = \frac{\sqrt{4R_\Gamma}}{\sqrt{9R_\Gamma}} = \frac{2}{3}$$

21.72) α) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h_1, έχουμε:

$$K_1 - K_0 = W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_0 - V_1\right) \quad ή$$

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} - V_1\right) \quad ή$$

$$\frac{1}{4}\frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} - \frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} = -2\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - 2V_1 \quad ή$$

$$V_1 = -\frac{61}{64}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}$$

β) Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_2 - K_0 = W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_0 - V_2\right) \quad ή$$

$$\left(\frac{1}{8}\upsilon_0\right)^2 - \upsilon_0^2 = 2\left(V_0 - V_2\right)$$

$$\frac{1}{64}\frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} - \frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} = 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} - V_2\right) \quad ή$$

$$V_2 = -\frac{961}{1.024}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h} = -\frac{961}{1.024}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή \quad \frac{1}{R_\Gamma + h} = \frac{961}{1.024}\frac{1}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$R_\Gamma + h = \frac{1.024}{961}R_\Gamma$$

$$g_2 = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} \quad ή \quad g_2 = G\frac{M_\Gamma}{\left(\dfrac{1.024}{961}R_\Gamma\right)^2}$$

γ) $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_0 = W_F$ ή $0 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_0 - V_{\tau\varepsilon\lambda}\right)$ ή

$$-\frac{1}{2}\frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - V_{\tau\varepsilon\lambda} \quad ή \quad V_{\tau\varepsilon\lambda} = -\frac{15}{16}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_{max}} = -\frac{15}{16}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$\frac{1}{R_\Gamma + h_{max}} = \frac{15}{16R_\Gamma} \quad ή \quad h_{max} = \frac{R_\Gamma}{15}$$

21.73) α) $V_1 = -G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h_1} = -G\dfrac{M_\Gamma}{10R_\Gamma}$

$$g_1 = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2} = G\frac{M_\Gamma}{100R_\Gamma^2}$$

β) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ, έχουμε:

$$K_1 - K_2 = W_F \;\; ή \;\; \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = m\left(V_2 - V_1\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 = 2\left(V_2 - V_1\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 = 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{5R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{10R_\Gamma}\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 = -\frac{1}{5}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \;\; ή \;\; \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + \frac{1}{5}\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \;\; ή$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{13GM_\Gamma}{10R_\Gamma}}$$

γ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το ύψος h_1 μέχρι το άπειρο:

$$K_\infty - K_1 = W_F \;\; ή \;\; K_\infty - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = m\left(V_1 - V_\infty\right) \;\; ή$$

$$K_\infty = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mV_1 \;\; ή \;\; K_\infty = m\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{11GM_\Gamma}{10R_\Gamma} - G\frac{M_\Gamma}{10R_\Gamma}\right) \;\; ή$$

$K_\infty = \dfrac{9}{20}\dfrac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} > 0$, άρα το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

21.74) α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h_1:

$$K_1 - K_0 = W_F \;\; ή \;\; 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_0 - V_1\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_0^2 = 2\left(V_1 - V_0\right) \;\; ή \;\; \upsilon_0^2 = 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{3R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_0 = 2\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}} \;\; ή \;\; \upsilon_0 = 2\sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{3}}$$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h_2:

$$K_2 - K_0 = W_F \;\; ή \;\; \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_0 - V_1\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_0^2 = 2\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_0^2 - \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \;\; ή \;\; \upsilon_2^2 = \frac{4g_0R_\Gamma}{3} - g_0R_\Gamma \;\; ή \;\; \upsilon_2 = \sqrt{\frac{g_0R_\Gamma}{3}}$$

$$\frac{U}{K} = \frac{-\dfrac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma}}{\dfrac{1}{2}m\dfrac{g_0R_\Gamma}{3}} = \frac{-\dfrac{g_0R_\Gamma m}{2}}{\dfrac{1}{2}m\dfrac{g_0R_\Gamma}{3}} = -3$$

γ) $\pi_U\% = \dfrac{U_2 - U_3}{U_3}100\% =$

$$= \frac{-\dfrac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma} + \dfrac{GM_\Gamma m}{\dfrac{3R_\Gamma}{2}}}{-\dfrac{GM_\Gamma m}{\dfrac{3R_\Gamma}{2}}}100\% = -25\%$$

$$E = U_1 + K_1 = U_1 = -\frac{GM_\Gamma m}{3R_\Gamma}$$

$$\pi_K\% = \frac{K_2 - K_3}{K_3}100\% = \frac{\left(E - U_2\right) - \left(E - U_3\right)}{\left(E - U_3\right)}100\% =$$

$$= \frac{U_3 - U_2}{E - U_3}100\% = \frac{-\dfrac{GM_\Gamma m}{\dfrac{3R_\Gamma}{2}} + \dfrac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma}}{-\dfrac{GM_\Gamma m}{3R_\Gamma} + \dfrac{GM_\Gamma m}{\dfrac{3R_\Gamma}{2}}}100\% = -50\%$$

21.75) $α_1$) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το ύψος h_1 (θέση Α) μέχρι την επιφάνεια της Γης (θέση Β):

$$K_B - K_A = W_B \;\; ή \;\; \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_A - V_B\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = 2\left(V_A - V_B\right) \;\; ή \;\; \upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 - 2\left(V_A - V_B\right) \;\; ή$$

$$\upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 - 2\left(-\frac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) \;\; ή \;\; \upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 - \frac{3GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \;\; ή$$

$$\upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 - \frac{3}{2}g_0R_\Gamma \;\; ή \;\; \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_1^2 - \frac{3}{2}g_0R_\Gamma} \;\; ή$$

$$\upsilon_0 = 2\cdot 10^3 m/s$$

$α_2$) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το ύψος h_1 (θέση Α) έως το ύψος h_2 (θέση Γ):

$$K_\Gamma - K_A = W_B \;\; ή \;\; K_\Gamma = K_A + m\left(V_A - V_\Gamma\right) \;\; ή$$

$$K_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + m\left(-G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) \;\; ή$$

$$K_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{4}mg_0R_\Gamma \;\; ή \;\; K_\Gamma = 1{,}08\cdot 10^{11} J$$

$β_1$) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση Α έως τη θέση Β για $\upsilon_2 = 10^3 m/s$:

$K'_B - K_A = W_F - F' \cdot h_1$ ή

$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_A - V_B\right) - F'h_1$ ή

$F'h_1 = m\left(-\frac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ ή

$F' = \frac{\frac{3}{4}g_0R_\Gamma m - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2}{h_1}$ ή $F' = 1{,}55 \cdot 10^4 N$

β$_2$) Για $\upsilon_2 = 0$ έχουμε:

$F' = \frac{\frac{3}{4}g_0R_\Gamma m + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2}{h_1}$ ή $F' = 1{,}5625 \cdot 10^4 N$

21.76) α) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη-διαστημικός σταθμός διατηρείται, επομένως:

$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$ ή

$-G\frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -G\frac{M_\Gamma m}{r_2} + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$ ή

$-\frac{g_0R_\Gamma^2}{r_1} + \frac{\upsilon_1^2}{2} = -\frac{g_0R_\Gamma^2}{r_2} + \frac{\upsilon_2^2}{2}$ ή $r_2 = \frac{-g_0R_\Gamma^2}{-\frac{g_0R_\Gamma^2}{r_1} + \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2}}$ ή

$r_2 \simeq 4{,}06 \cdot 10^5 m$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$E_1 + E = K$ ή $-G\frac{M_\Gamma m_1}{r_1} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + E = K$ ή

$E = K + \frac{g_0R_\Gamma^2 m_1}{r_1} - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή $E = 6 \cdot 10^{10} J$

γ) $E_1 + E_{min} = 0$ ή $E_{min} = G\frac{M_\Gamma m_1}{r_1} - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ ή

$E_{min} = 4{,}192 \cdot 10^{10} J$

21.77) α$_1$) $\upsilon_1 = \alpha t_1$ ή $t_1 = \frac{\upsilon_1}{\alpha}$ ή $t_1 = 1.000 s$

α$_2$) $h_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$ ή $h_1 = 12{,}8 \cdot 10^6 m$ ή

$h_1 = 2 \cdot 64 \cdot 10^5 m = 2R_\Gamma$

$g_1 = G\frac{M_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{\left(3R_\Gamma\right)^2} = \frac{g_0}{9}$ ή $g_1 = \frac{10}{9} m/s^2$

Β. Η ταχύτητα διαφυγής από το ύψος h_1 είναι:

$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}} = \sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{3R_\Gamma}} =$

$= \sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma}{3}} \simeq 6{,}53 \cdot 10^3 m/s$

Επειδή $\upsilon_1 > \upsilon_\delta$, το όχημα θα διαφύγει.

Γ. Σε απόσταση $r = 4R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης το όχημα πρέπει να έχει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής σ' αυτό το σημείο.

$\upsilon_\delta = \alpha' t$ ή $t = \frac{\upsilon_\delta}{\alpha'}$

$h = \frac{1}{2}\alpha' t^2$ ή $3R_\Gamma = \frac{1}{2}\alpha' \cdot \frac{\upsilon_\delta^2}{\alpha'^2}$ ή $6R_\Gamma = \frac{\upsilon_\delta^2}{\alpha'}$ ή

$\alpha' = \frac{\upsilon_\delta^2}{6R_\Gamma} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{4R_\Gamma}}\right)^2}{6R_\Gamma} = \frac{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}}{6R_\Gamma} = \frac{g_0}{12}$ ή

$\alpha' = \frac{5}{6} m/s^2$

21.78) α) $\Sigma F = m\alpha$ ή $3mg_0 - mg_0 = m\alpha$ ή $\alpha = 2g_0$ ή

$\alpha = 20 m/s^2$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h:

$K - K_0 = W_{\Sigma F}$ ή $K - K_0 = W_F + W_B$ ή

$K - K_0 = 3\left|W_B\right| - W_B$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 2\left|m\left(V_0 - V_1\right)\right|$ ή

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 4\left|V_0 - V_1\right|$ ή $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 4\left|-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}\right|$ ή

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + \frac{8}{3}g_0R_\Gamma$ ή $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{8}{3}g_0R_\Gamma}$ ή

$\upsilon = 8\sqrt{3} \cdot 10^3 m/s$

γ) $\Sigma F = m\alpha$ ή $3mg - mg = m\alpha$ ή $2g = \alpha$ ή

$2\frac{GM_\Gamma}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} = \frac{g_0}{2}$ ή $\frac{2g_0R_\Gamma^2}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} = \frac{g_0}{2}$ ή $\frac{R_\Gamma^2}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} = \frac{1}{4}$

ή $\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2}$ ή $h = R_\Gamma = 6.400 km$

$V = -G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} = \frac{-g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} = -\frac{g_0R_\Gamma}{2} = -32 \cdot 10^6 J/kg$

21.79) α) Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Για τον δορυφόρο Δ_1 ισχύει:

$F = F_\kappa$ ή $G\frac{M_\Gamma m_1}{\left(R_\Gamma + h_1\right)^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{R_\Gamma + h_1}$ ή $\upsilon_1^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}$ ή

$\upsilon_1^2 = \frac{g_0R_\Gamma^2}{9R_\Gamma}$ ή $\upsilon_1^2 = \frac{g_0R_\Gamma}{9}$ ή $\upsilon_1 = \frac{\sqrt{g_0R_\Gamma}}{3}$

Ομοίως για τον δορυφόρο Δ_2 ισχύει: $\upsilon_2 = \dfrac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{4}$

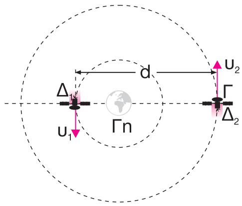
Επομένως: $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{\dfrac{\upsilon_1}{2\pi r_1}}{\dfrac{\upsilon_2}{2\pi r_2}} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \cdot \dfrac{r_2}{r_1} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{3}}{\dfrac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{4}} \cdot \frac{16R_\Gamma}{9R_\Gamma} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{64}{27}$$

β) $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{\dfrac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2}{\dfrac{1}{2} m_1 \upsilon_2^2} = \dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \dfrac{16}{9}$

γ) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\dfrac{1}{f_1}}{\dfrac{1}{f_2}} = \dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{27}{64}$

Επομένως, όταν ο δορυφόρος Δ_2 έχει κάνει 32 περιφορές, ο Δ_1 έχει κάνει 13,5 περιφορές.

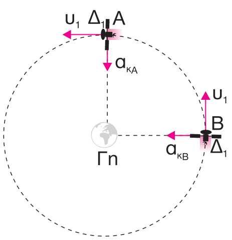


Επομένως: $d = r_1 + r_2 = R_\Gamma + h_1 + R_\Gamma + h_2 = 25R_\Gamma$

δ) $\Delta\vec{\alpha}_\kappa = \vec{\alpha}_{\kappa_A} - \vec{\alpha}_{\kappa_B} = \vec{\alpha}_{\kappa_A} + \left(-\vec{\alpha}_{\kappa_B}\right)$

$\Delta\alpha_\kappa = \sqrt{\alpha_{\kappa_A}^2 + \alpha_{\kappa_B}^2} = \sqrt{2\alpha_{\kappa_A}^2} = \alpha_{\kappa_A}\sqrt{2} = \dfrac{\upsilon_1^2}{r_1}\sqrt{2}$ ή

$$\Delta\alpha_\kappa = \frac{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{9}}{R_\Gamma + h_1}\sqrt{2} = \frac{g_0 R_\Gamma}{81R_\Gamma}\sqrt{2} = \frac{g_0\sqrt{2}}{81}$$



21.80) α) Η βαρυτική έλξη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$F = F_\kappa$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m}{\left(R_\Gamma + h\right)^2} = m\dfrac{\upsilon_1^2}{R_\Gamma + h}$ ή

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}$$

Εφόσον οι δορυφόροι έχουν ίσες ακτίνες περιφοράς γύρω από τη Γη, ισχύει $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$.

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} = \sqrt{g_0 R_\Gamma}$$

Άρα: $\dfrac{\upsilon}{\upsilon_\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ή $\upsilon = \dfrac{\upsilon_\delta\sqrt{2}}{2}$

β) $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon_\kappa$ ή $\upsilon_\kappa = 0$

γ) $U_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda}$, άρα: $E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$

$$\pi_E\% = \left|\frac{E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi}}{E_{\alpha\rho\chi}}\right| \cdot 100\% = \frac{\left|K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}\right|}{\left|U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi}\right|} 100\% =$$

$$= \frac{\left|0 - \left(\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right)\right|}{\left|-\dfrac{GM_\Gamma m_1}{2R_\Gamma} - \dfrac{GM_\Gamma m_2}{2R_\Gamma} + \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right|} \cdot 100\% =$$

$$= \left|\frac{-m\upsilon^2}{-g_0 R_\Gamma m + m\upsilon^2}\right| \cdot 100\% =$$

$$= \left|\frac{-\dfrac{1}{2}mg_0 R_\Gamma}{-g_0 R_\Gamma m + \dfrac{1}{2}mg_0 R_\Gamma}\right| 100\% = 100\%$$

δ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το συσσωμάτωμα των δύο δορυφόρων:

$\Delta K = W_B$ ή $\dfrac{1}{2}2m\upsilon'^2 - 0 = 2m\left(V_1 - V_0\right)$ ή

$\upsilon'^2 = 2 \cdot \left(-\dfrac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} + \dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right)$ ή $\upsilon'^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\dfrac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma}$ ή

$\upsilon' = \sqrt{g_0 R_\Gamma}$

21.81) α) Εφόσον ο δορυφόρος βρίσκεται συνεχώς πάνω από τον ίδιο τόπο του Ισημερινού, η περίοδος περιφοράς του δορυφόρου είναι ίση με την περίοδο περιστροφής T_Γ της Γης.

$F = F_\kappa$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m}{r^2} = \dfrac{m\upsilon^2}{r}$ ή $GM_\Gamma = \upsilon^2 r$ ή

$$GM_\Gamma = \omega^2 r^3 \quad \text{ή} \quad r^3 = \frac{GM_\Gamma}{\omega^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\frac{4\pi^2}{T_\Gamma^2}} \quad \text{ή} \quad r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_\Gamma^2 T_\Gamma^2}{4\pi^2}}$$

β) $$V = -\frac{GM_\Gamma}{r} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{\sqrt[3]{\frac{g_0 R_\Gamma^2 T_\Gamma^2}{4\pi^2}}}$$

$$g = G\frac{M_\Gamma}{r^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\sqrt[3]{\frac{g_0^2 R_\Gamma^4 T_\Gamma^4}{16\pi^4}}}$$

γ) $$F = F_\kappa \quad \text{ή} \quad G\frac{M_\Gamma m}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\frac{GM_\Gamma m}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{ή}$$

$$K = \frac{1}{2}G\frac{M_\Gamma m}{r}$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}G\frac{M_\Gamma m}{r} - G\frac{M_\Gamma m}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_\Gamma m}{r} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2 m}{2r} \quad \text{ή} \quad E = -\frac{g_0 R_\Gamma^2 m}{2\sqrt[3]{\frac{g_0 R_\Gamma^2 T_\Gamma^2}{4\pi^2}}}$$

δ) $$\varphi = \omega\Delta t \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{3} \quad \text{ή}$$

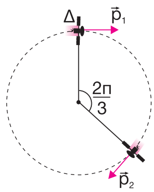
$$\varphi = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

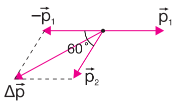
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu 60^\circ} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = \sqrt{3p_1^2} \quad \text{ή} \quad \Delta p = p_1\sqrt{3} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = m\upsilon\sqrt{3}$$





21.82) α) Όταν ο δορυφόρος περιφέρεται σε ύψος h_1, ισχύει:

$$F_1 = F_\kappa \quad \text{ή} \quad G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h_1)^2} = m\frac{\upsilon_1^2}{R_\Gamma + h_1} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} = \frac{g_0 R_\Gamma}{2}$$

Στο ύψος h_2 ισχύει ομοίως: $\upsilon_2^2 = \dfrac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_2}$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \Delta K \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + \frac{2\Delta K}{m} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2^2 = \frac{g_0 R_\Gamma}{2} + \frac{2\Delta K}{m} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{12{,}8}{3}\cdot 10^7 m^2/s^2$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h_2} \quad \text{ή} \quad R_\Gamma + h_2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\upsilon_2^2} \quad \text{ή} \quad h_2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\upsilon_2^2} - R_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$h_2 = 32\cdot 10^5 m \quad \text{ή} \quad h_2 = \frac{R_\Gamma}{2}$$

β) $$\frac{g_2}{g_0} = \frac{\dfrac{GM_\Gamma}{\left(\dfrac{3R_\Gamma}{2}\right)^2}}{\dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2}} = \frac{4R_\Gamma^2}{9R_\Gamma^2} = \frac{4}{9} \quad \text{ή} \quad g_2 = \frac{4g_0}{9}$$

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{-\dfrac{GM_\Gamma}{\dfrac{3R_\Gamma}{2}}}{-\dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad V_2 = \frac{2}{3}V_0$$

γ) $$F_2 = g_2 m = \frac{4}{9}g_0 m \quad \text{ή} \quad F_2 = \frac{8}{9}\cdot 10^3 N$$

δ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το ύψος h_1 μέχρι το ύψος h_2:

$$\Delta K = W_B + W_A \quad \text{ή} \quad \Delta K = m(V_1 - V_2) - A\ell \quad \text{ή}$$

$$A = \frac{m(V_1 - V_2) - \Delta K}{\ell} \quad \text{ή}$$

$$A = \frac{m\left(-\dfrac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} + \dfrac{GM_\Gamma}{\frac{3}{2}R_\Gamma}\right) - \Delta K}{\ell} \quad \text{ή} \quad A = \frac{\frac{1}{6}mg_0R_\Gamma - \Delta K}{\ell} \quad \text{ή}$$

$$A = 250N$$

21.83) α₁) $$F_\Sigma = F_\kappa \quad \text{ή} \quad G\frac{M_\Sigma(M+m)}{(R_\Sigma + h)^2} = (M+m)\frac{\upsilon_1^2}{R_\Sigma + h} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{GM_\Sigma}{R_\Sigma + h} = \frac{g_0 R_\Sigma^2}{R_\Sigma + h} \quad \text{ή} \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Sigma^2}{R_\Sigma + h}} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_1 = 1{,}6\cdot 10^3 m/s$$

α₂) $$g = \frac{GM_\Sigma}{(R_\Sigma + h)^2} = \frac{g_0 R_\Sigma^2}{(R_\Sigma + h)^2} = 1{,}451 m/s^2$$

β₁) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος κατά την απελευθέρωση της σεληνακάτου:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad (M+m)\upsilon_1 = M\upsilon_1' \quad \text{ή} \quad m = \frac{M\upsilon_1' - M\upsilon_1}{\upsilon_1} \quad \text{ή}$$

$$m = 2\cdot 10^3 kg$$

β₂) $\Delta p_{οχ} = M\upsilon_1' - M\upsilon_1$ ή $\Delta p_{οχ} = 3{,}2 \cdot 10^6 kg \cdot m/s$

$\Delta p_{σελ} = -\Delta p_{οχ} = -3{,}2 \cdot 10^6 kg \cdot m/s$

β₃) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο της απελευθέρωσης της σεληνακάτου μέχρι την επιφάνεια της Σελήνης:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_F$ ή $0 - 0 = m\left(V_{αρχ} - V_{τελ}\right) + W_F$ ή

$$W_F = m\left(V_{τελ} - V_{αρχ}\right) = m\left(-G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma} + G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma + h}\right) =$$

$$= m\left(\frac{g_0 R_\Sigma^2}{R_\Sigma + h} - \frac{g_0 R_\Sigma^2}{R_\Sigma}\right) = -2{,}56 \cdot 10^8 J$$

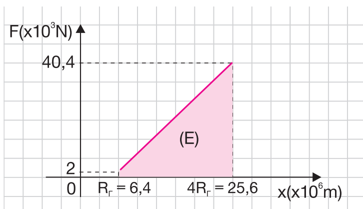
21.84) α) $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\dfrac{2g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}} =$

$$= \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 m/s$$

β) Από τη σχέση $F = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^{-3}\left(x - R_\Gamma\right)$ έχουμε:

Για $x = R_\Gamma$ προκύπτει: $F = 2 \cdot 10^3 N$

Για $x = 4R_\Gamma$ προκύπτει: $F = 40{,}4 \cdot 10^3 N$



$$W_F = (E) = \frac{2 \cdot 10^3 + 40{,}4 \cdot 10^3}{2} \cdot 3R_\Gamma = 4{,}07 \cdot 10^{11} J$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι ύψος $h = 3R_\Gamma$:

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_F$ ή

$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = m\left(V_0 - V\right) + W_F$ ή $\upsilon^2 = 2\left(V_0 - V\right) + \dfrac{2W_F}{m}$ ή

$$\upsilon^2 = 2\left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma}\right) + \frac{2W_F}{m} \quad ή$$

$\upsilon^2 = -\dfrac{6}{4}g_0 R_\Gamma + \dfrac{2W_F}{m}$ ή $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2W_F}{m} - \dfrac{6}{4}g_0 R_\Gamma}$ ή

$\upsilon \simeq 6{,}3 \cdot 10^4 m/s$

Επειδή $\upsilon > \upsilon_\delta$, το σώμα θα διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

γ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο:

$K_\infty - K_{αρχ} = W_B + W_F$ ή

$\frac{1}{2}m\upsilon'^2 - 0 = m\left(V_0 - V_\infty\right) + W_F$ ή

$\frac{1}{2}m\upsilon'^2 = m\left(-\dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) + W_F$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon'^2 = -mg_0 R_\Gamma + W_F$ ή

$\upsilon' = \sqrt{\dfrac{2\left(W_F - mg_0 R_\Gamma\right)}{m}}$ ή $\upsilon' \simeq 6{,}28 \cdot 10^4 m/s$

21.85) α) $F = F_\kappa$ ή $G\dfrac{M_\Gamma m}{r^2} = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$ ή $\upsilon^2 = \dfrac{GM_\Gamma}{r}$ ή

$\upsilon^2 = \dfrac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}$ ή $\upsilon = \sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}}$

Επειδή η ταχύτητα περιφοράς είναι ανεξάρτητη της μάζας, εφόσον η ακτίνα περιφοράς είναι ίδια, ισχύει:

$$\upsilon_1 = \upsilon = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} = \frac{4\pi R_\Gamma}{\sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}} = \frac{4\pi R_\Gamma \sqrt{2}}{\sqrt{g_0 R_\Gamma}} = 4\pi\sqrt{\frac{2R_\Gamma}{g_0}}$$

Ομοίως: $T_1 = T = 4\pi\sqrt{\dfrac{2R_\Gamma}{g_0}}$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο της διάσπασης μέχρι την επιφάνεια της Γης:

$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = m_2\left(V_1 - V_0\right)$ ή

$\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2 = 2\left(-G\dfrac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} + G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right)$ ή $\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2 = G\dfrac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$ ή

$\upsilon_2^2 = \upsilon_2'^2 - \dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} = 5g_0 R_\Gamma - g_0 R_\Gamma = 4g_0 R_\Gamma$ ή

$\upsilon_2 = 2\sqrt{g_0 R_\Gamma}$

γ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής κατά τη διάσπαση έχουμε:

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ ή $m\upsilon = -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$ ή

$m\sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}} = -m_1\sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}} + m_2 2\sqrt{g_0 R_\Gamma}$ ή

$\left(m_1 + m_2\right)\sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}} = -m_1\sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}} + m_2 2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{g_0 R_\Gamma}{2}}$ ή

$m_1 + m_2 = -m_1 + m_2 2\sqrt{2}$ ή

$$m=-\left(m-m_2\right)+m_2 2\sqrt{2} \quad ή \quad 2m=m_2\left(1+2\sqrt{2}\right) \quad ή$$

$$m_2=\frac{2m}{1+2\sqrt{2}}$$

$$m_1=m-m_2=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)m}{1+2\sqrt{2}}$$

δ) $\Delta E=K_1+K_2-K=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon^2=$

$$=\frac{1}{2}m_1\frac{g_0R_\Gamma}{2}+\frac{1}{2}m_2 4g_0R_\Gamma-m\frac{g_0R_\Gamma}{4} \quad ή$$

$$\Delta E=\frac{g_0R_\Gamma}{4}\left(m_1+8m_2-m\right)=$$

$$=\frac{g_0R_\Gamma}{4}\left(8m_1+8m_2-m-7m_1\right)=\frac{g_0R_\Gamma}{4}\left(7m-7m_1\right)=$$

$$=\frac{7}{4}g_0m_2R_\Gamma=\frac{7}{2}\frac{mg_0R_\Gamma}{1+2\sqrt{2}}$$

Κριτήριο Αξιολόγησης

Θέμα 1ο

α) i-Σ, ii-Σ, iii-Λ

β) i-Λ, ii-Λ, iii-Σ

γ) ii

δ) i

Θέμα 2ο

α) i: $F=F_\kappa$ ή $G\frac{M_\Gamma m_A}{R_A^2}=m_A\frac{\upsilon_A^2}{R_A}$ ή $\upsilon_A^2=G\frac{M_\Gamma}{R_A}$ ή

$$\upsilon_A^2=\frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}$$

Ομοίως: $\upsilon_B^2=\frac{GM_\Gamma}{5R_\Gamma}$

Επομένως: $\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2}{\frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2}=\frac{m_A\frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}}{3m_A\frac{GM_\Gamma}{5R_\Gamma}}=\frac{5}{9}$

β) ii: $M_\pi=V_\pi\rho_\pi=\frac{4}{3}\pi R_\pi^3\rho_\pi=$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_\Gamma}{2}\right)^3\frac{3\rho_\Gamma}{4}=\frac{3}{32}\cdot\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3\cdot\rho_\Gamma=\frac{3}{32}M_\Gamma$$

$$\frac{\upsilon_{\delta_\pi}}{\upsilon_{\delta_\Gamma}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_\pi}{R_\pi}}}{\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}}=\sqrt{\frac{M_\pi R_\Gamma}{M_\Gamma R_\pi}}=\sqrt{\frac{6M_\Gamma R_\Gamma}{32M_\Gamma R_\Gamma}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad ή \quad \upsilon_{\delta_\pi}=\frac{\upsilon_{\delta_\Gamma}\sqrt{3}}{4}$$

Θέμα 3ο

α) $\upsilon_\delta=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}=\sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{\frac{4R_\Gamma}{3}}}=\sqrt{\frac{6GM_\Gamma}{4R_\Gamma}}=$

$$=\sqrt{\frac{6g_0R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}}=\frac{\sqrt{6g_0R_\Gamma}}{2}$$

β) Επειδή $\upsilon_1>\upsilon_\delta$, το σώμα απομακρύνεται από το βαρυτικό πεδίο.

Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=m\left(V_1-V_\infty\right) \quad ή$$

$$\upsilon^2=\upsilon_1^2+2\left(V_1-0\right) \quad ή \quad \upsilon^2=\upsilon_1^2+2V_1 \quad ή$$

$$\upsilon^2=3g_0R_\Gamma+2\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma+h}\right)=$$

$$=3g_0R_\Gamma-2\frac{g_0R_\Gamma^2}{\frac{4}{3}R_\Gamma}=\frac{3}{2}g_0R_\Gamma \quad ή \quad \upsilon=\sqrt{\frac{3g_0R_\Gamma}{2}}$$

γ) Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=m\left(V_1-V_2\right) \quad ή$$

$$\upsilon_2^2-\upsilon_1^2=2\left(V_1-V_2\right) \quad ή \quad V_2=V_1+\frac{\upsilon_1^2-\upsilon_2^2}{2} \quad ή$$

$$V_2=-G\frac{M_\Gamma}{\frac{4}{3}R_\Gamma}+\frac{3g_0R_\Gamma-\frac{3g_0R_\Gamma}{8}}{2} \quad ή$$

$$V_2=-\frac{3g_0R_\Gamma}{4}-\frac{21g_0R_\Gamma}{16} \quad ή \quad V_2=-\frac{33g_0R_\Gamma}{16}$$

Θέμα 4ο

$α_1$) Επειδή η μόνη δύναμη των πλανητών είναι η μεταξύ τους έλξη, αυτή παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Άρα, η δύναμη της παγκόσμιας έλξης έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς και οι πλανήτες βρίσκονται συνεχώς σε αντιδιαμετρική θέση και επομένως περιφέρονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω.

Για τον πλανήτη Π_1 ισχύει:

$$F_1 = F_{\kappa_1} \text{ ή } G\frac{m_1 m_2}{\ell^2} = m_1\omega^2 r_1 \text{ ή } \frac{9Gm_1}{\ell^2} = \omega^2 r_1 \quad (1)$$

Ομοίως για τον πλανήτη Π_2 ισχύει:

$$F_2 = F_{\kappa_2} \text{ ή } G\frac{m_1 m_2}{\ell^2} = m_2\omega^2 r_2 \text{ ή } \frac{Gm_1}{\ell^2} = \omega^2 r_2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$\frac{r_1}{r_2} = 9 \quad (3)$$

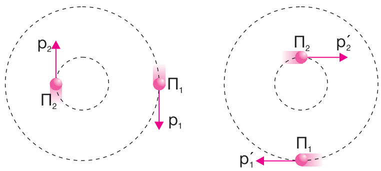
$r_1 + r_2 = \ell$ ή $9r_2 + r_2 = \ell$ ή $10r_2 = \ell$ ή $r_2 = \dfrac{\ell}{10}$ και

$$r_1 = \frac{9\ell}{10}$$

α$_2$) $\dfrac{\alpha_{\kappa_1}}{\alpha_{\kappa_2}} = \dfrac{\omega^2 r_1}{\omega^2 r_2} = 9$

α$_3$) $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 + (-\vec{p}_1)$ ή

$$\Delta p_1 = \sqrt{p_1^2 + p_1'^2} = p_1\sqrt{2}$$

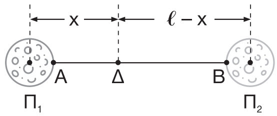


Ομοίως: $\Delta p_2 = p_2\sqrt{2}$

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1\upsilon_1}{m_2\upsilon_2} = \frac{m_1\omega r_1}{m_2\omega r_2} = \frac{m_1}{9m_1}\cdot\frac{9r_2}{r_2} = 1 \text{ ή}$$

$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$

β$_1$) Έστω x η απόσταση από το κέντρο του πλανήτη Π_1 του σημείου Δ όπου $\Sigma F = 0$.



$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F_1 = F_2 \text{ ή } G\frac{m_1 m_B}{x^2} = G\frac{m_2 m_B}{(\ell - x)^2} \text{ ή}$$

$$\frac{m_1}{x^2} = \frac{9m_1}{(\ell - x)^2} \text{ ή } \frac{\ell - x}{x} = 3 \text{ ή } \ell = 4x \text{ ή } x = \frac{\ell}{4}$$

β$_2$) Θα πρέπει στο σημείο Δ η ταχύτητα του βλήματος να είναι $\upsilon = 0$.

$$V_A = V_1 + V_2 = -G\frac{m_1}{R_1} - G\frac{m_2}{\ell - R_1} =$$

$$= -\frac{Gm_1}{R_1} - \frac{9Gm_1}{82R_1 - R_1} = -\frac{Gm_1}{R_1} - \frac{Gm_1}{9R_1} = -\frac{10Gm_1}{9R_1}$$

$$V_\Delta = V_1' + V_2' = -G\frac{m_1}{x} - G\frac{m_2}{\ell - x} =$$

$$= -G\frac{m_1}{\frac{\ell}{4}} - G\frac{m_2}{\frac{3\ell}{4}} = \frac{-4Gm_1}{\ell} - \frac{4\cdot 9Gm_1}{3\ell} =$$

$$= \frac{-16Gm_1}{\ell} = -\frac{16Gm_1}{82R_1} = -\frac{8Gm_1}{41R_1}$$

Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = m_\beta(V_A - V_\Delta) \text{ ή}$$

$$0 - \frac{1}{2}m_\beta\upsilon_{min}^2 = m_\beta(V_A - V_\Delta) \text{ ή}$$

$$-\upsilon_{min}^2 = 2\left(-\frac{10Gm_1}{9R_1} + \frac{8Gm_1}{41R_1}\right) \text{ ή } \upsilon_{min}^2 = \frac{676Gm_1}{369R_1} \text{ ή}$$

$$\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{676Gm_1}{369R_1}}$$

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΩΝ
& ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ «ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ»

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΓΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

5.35) της δύναμης, διανυσματικό, 1N/kg ή $1\text{m}/\text{s}^2$

5.36) α, β, δ

5.37) την αρχική και την τελική, διατηρητικό, του έργου, τη μάζα m

5.38) Η ελκτική δύναμη που δέχεται το σώμα από τη Γη $\left(F = G\dfrac{M_\Gamma m}{r^2}\right)$ αυξάνεται. Άρα, αυξάνεται και η επιτάχυνσή του $\left(\alpha = \dfrac{F}{m}\right)$. Σωστή είναι η απάντηση γ.

5.39) α, γ, δ

5.40) α, ε

5.41) $g = \dfrac{g_0 R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2}$, $V = -\dfrac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}$, $\upsilon_\delta = \sqrt{\dfrac{2g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}}$

5.42) Το πεδίο βαρύτητας είναι διατηρητικό. Επειδή η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που δέχεται, η μηχανική της ενέργεια διατηρείται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.76) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{(2R_\Gamma)^2} = \frac{g_0}{4} = 2{,}5\text{m}/\text{s}^2$$

Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου είναι:

$$V = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} = -\frac{g_0 R_\Gamma}{2} = -32 \cdot 10^6\,\text{J}/\text{kg}$$

5.77) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο Α στην επιφάνεια της Γης μέχρι το ανώτερο σημείο Γ στο οποίο φτάνει:

$$\Delta K = W \quad \text{ή} \quad -K_A = m(V_A - V_\Gamma) \quad \text{ή}$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right) \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} + \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} \quad \text{ή}$$

$$h = \frac{2g_0 R_\Gamma^2}{2g_0 R_\Gamma - \upsilon_0^2} - R_\Gamma \quad \text{ή} \quad h = 50\text{km}$$

5.78) α) Έστω g_Σ η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της Σελήνης και g_0 η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της Γης.

$$g_\Sigma = G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma^2} \quad (1) \quad \text{και} \quad g_0 = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{g_\Sigma}{g_0} = \frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}\right)^2 \quad \text{ή} \quad g_\Sigma = 1{,}66\,m/s^2$$

β) $$\frac{B_\Sigma}{B_\Gamma} = \frac{mg_\Sigma}{mg_0} \quad \text{ή} \quad \frac{B_\Sigma}{B_\Gamma} = \frac{g_\Sigma}{g_0} \quad \text{ή} \quad B_\Sigma = B_\Gamma\frac{g_\Sigma}{g_0} \quad \text{ή} \quad B_\Sigma = 116{,}2N$$

5.79) Έστω Α το σημείο της εκτόξευσης.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty$$

Η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το σώμα είναι εκείνη για την οποία φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα. Επομένως:

$$K_A + U_A = 0 + 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 - G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_\delta^2 = \frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}}$$

5.80) Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια του πλανήτη είναι:

$$\upsilon_\Pi = \sqrt{\frac{2GM_\Pi}{R_\Pi}} \quad (1)$$

Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{\upsilon_\Pi}{\upsilon_\Gamma} = \sqrt{\frac{M_\Pi}{M_\Gamma}\frac{R_\Gamma}{R_\Pi}} = \sqrt{\frac{1}{8}\frac{R_\Gamma}{R_\Pi}} \quad (3)$$

$$\frac{M_\Gamma}{M_\Pi} = \frac{\rho V_\Gamma}{\rho V_\Pi} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_\Gamma^3}{\frac{4}{3}\pi R_\Pi^3} = \left(\frac{R_\Gamma}{R_\Pi}\right)^3 \quad \text{ή} \quad \frac{R_\Gamma}{R_\Pi} = 2 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

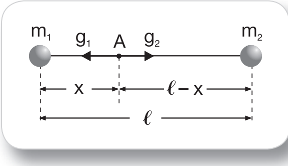
$$\frac{\upsilon_\Pi}{\upsilon_\Gamma} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\Pi = \frac{\upsilon_\Gamma}{2} = 5{,}6\,km/s$$

5.81) Έστω υ_0 η ταχύτητα του μετεωρίτη όταν είναι εκτός πεδίου βαρύτητας της Γης.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του μετεωρίτη από σημείο εκτός του πεδίου βαρύτητας της Γης μέχρι την επιφάνεια της Γης, έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_\infty - V_\Gamma\right) \quad ή \quad \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = \frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon_0^2 = \upsilon^2 - 2g_0R_\Gamma \quad ή \quad \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 - 2g_0R_\Gamma} = 14\cdot 10^3 m/s$$

5.82) Έστω Α ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών όπου ισχύει $\vec{g} = 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επομένως:



$$\vec{g} = 0 \quad ή \quad g_1 = g_2 \quad ή \quad G\frac{m}{x^2} = G\frac{2m}{(\ell - x)^2} \quad ή \quad \frac{\ell - x}{x} = \pm\sqrt{2}$$

Για $\frac{\ell - x}{x} = \sqrt{2}$ έχουμε: $x = \ell\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Για $\frac{\ell - x}{x} = -\sqrt{2}$ έχουμε $x = -\ell\left(1 + \sqrt{2}\right)$ (απορρίπτεται, επειδή η αρνητική τιμή σημαίνει ότι το Α βρίσκεται αριστερά του m_1)

$$V_A = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{x} - G\frac{2m}{\ell - x} = -G\frac{m}{\ell}\left(2\sqrt{2} + 3\right)$$

5.83) Η ενέργεια του συστήματος των τριών μαζών δίνεται από τη σχέση:

$$U = -G\frac{m_1m_2}{\gamma} - G\frac{m_1m_3}{\beta} - G\frac{m_2m_3}{\alpha}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

$$E = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = -U = G\frac{m_1m_2}{\gamma} + G\frac{m_1m_3}{\beta} + G\frac{m_2m_3}{\alpha}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.104) α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο Α που είναι σε ύψος h μέχρι το σημείο Γ στην επιφάνεια της Γης:

$$\Delta K = W_B \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_A - V_\Gamma\right) \quad ή \quad \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \quad ή$$

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2} = -\frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} + \frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g_0R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = 8\sqrt{2}\cdot 10^3 m/s$$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το Α έως το Γ:

$$\Delta K = W_B + W_F \quad ή \quad 0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(V_A - V_\Gamma\right) - Fh \quad ή$$

$$-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right) - Fh \quad ή \quad -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{g_0 R_\Gamma m}{2} - Fh \quad ή$$

$$F = \frac{m\left(\upsilon_0^2 + g_0 R_\Gamma\right)}{2R_\Gamma} \quad ή \quad F = 8\cdot 10^4 N$$

5.105) α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα Γη-σταθμός:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \quad ή \quad -G\frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -G\frac{M_\Gamma m}{r_2} + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \quad ή$$

$$-\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_1} + \frac{\upsilon_1^2}{2} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{r_2} + \frac{\upsilon_2^2}{2} \quad ή \quad \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2g_0 R_\Gamma^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \quad ή \quad \upsilon_2 = 6{,}16\cdot 10^3 m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$E_{αρχ} + E = E_{τελ}$ (1), όπου $E_{αρχ}$, $E_{τελ}$ η αρχική και η τελική ενέργεια του συστήματος συσκευή-Γη.

Κατά την περιφορά της συσκευής γύρω από τη Γη η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, οπότε η $E_{αρχ}$ είναι ίδια σε όλα τα σημεία της τροχιάς.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$-G\frac{M_\Gamma m}{r_1} + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + E = 0 \quad ή \quad E = \frac{g_0 R_\Gamma^2 m}{r_1} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = 3{,}7\cdot 10^9 J$$

5.106) Μέχρι το ύψος h όπου το όχημα αποκτά την ταχύτητα διαφυγής, το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\upsilon_\delta = \alpha t \quad (1) \quad και \quad h = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $h = \frac{\upsilon_\delta^2}{2\alpha}$ (3)

Η ταχύτητα διαφυγής είναι:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$h = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\alpha\left(R_\Gamma + h\right)} \quad ή \quad h^2 + 64\cdot 10^5 h - 128\cdot 10^{11} = 0 \quad ή \quad h = 1{,}6\cdot 10^6 m$$

5.107) α) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος από ένα σημείο Γ στην επιφάνεια της Γης μέχρι το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος x όπου το σώμα αποκτά την ταχύτητα διαφυγής:

$$\Delta K = W_B + W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 - 0 = m\left(V_\Gamma - V_A\right) + Fx \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = m\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + x}\right) + Fx \quad ή \quad \frac{1}{2}m\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + x} = m\left(-\frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} + \frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma + x}\right) + Fx \quad ή$$

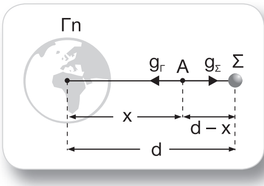
$$Fx = mg_0R_\Gamma \quad ή \quad x = \frac{mg_0R_\Gamma}{F} \quad ή \quad x = 3{,}2\cdot 10^6 m$$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο:

$$\Delta K = W_B + W_F \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mV_\Gamma + Fh \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2 = -G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} + Fh \quad ή$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = -\frac{g_0R_\Gamma^2 m}{R_\Gamma} + Fh \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2Fh}{m} - 2g_0R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = 5{,}06\cdot 10^3 m/s$$

5.108) Έστω Α το σημείο όπου $\vec{g} = 0$ και το οποίο απέχει απόσταση x από το κέντρο της Γης, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως:

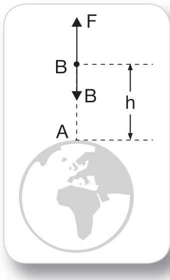
$$\vec{g} = 0 \quad ή \quad g_\Gamma = g_\Sigma \quad ή \quad G\frac{M_\Gamma}{x^2} = G\frac{M_\Sigma}{(d-x)^2} \quad ή \quad \frac{x}{d-x} = \pm\sqrt{\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}} \quad ή \quad \frac{x}{d-x} = \pm 9$$

Για $\frac{x}{d-x} = 9$ ή $\frac{x}{60R_\Gamma - x} = 9$ έχουμε: $x = 54R_\Gamma$

Για $\frac{x}{d-x} = -9$ ή $\frac{x}{60R_\Gamma - x} = -9$ έχουμε: $x = 67{,}5R_\Gamma$

Η λύση $x = 67{,}5R_\Gamma$ απορρίπτεται, επειδή το σημείο βρίσκεται εκτός του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα κέντρα της Γης και της Σελήνης όπου οι εντάσεις που οφείλονται στη Γη και στη Σελήνη είναι ομόρροπες.

5.109) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο Α στην επιφάνεια της Γης μέχρι το σημείο Β που βρίσκεται σε ύψος h, όπως φαίνεται στο σχήμα:



$\Delta K = W_B + W_F$ (1)

Επειδή $W_F = -2W_B$, η σχέση (1) γίνεται:

$$\Delta K = -W_B \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2 = -m\left(V_A - V_B\right) \quad ή \quad \frac{1}{2}m\upsilon^2 = -m\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}\right) \quad ή$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} - \frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = \sqrt{g_0R_\Gamma} \quad ή \quad \upsilon = 8\cdot 10^3 m/s$$

5.110) α) Στην κυκλική κίνηση του δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$G\frac{M_\Gamma m}{\left(R_\Gamma+h\right)^2}=m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma+h} \quad \text{ή} \quad \upsilon=\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}$$

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του δορυφόρου κατά την αλλαγή της τροχιάς του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta K=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{GM_\Gamma}{\frac{16R_\Gamma}{9}}-\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}\right)=\frac{1}{2}m\left(\frac{9g_0R_\Gamma^2}{16R_\Gamma}+\frac{g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}\right)=\frac{1}{32}mg_0R_\Gamma=2\cdot10^8\,J$$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ κατά την κίνηση του δορυφόρου από την αρχική στην τελική τροχιά:

$$\Delta K=W_B-W_A \quad \text{ή} \quad \Delta K=W_B-As \quad (1)$$

Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι:

$$W_B=m\left(V_1-V_2\right)=m\left(-G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}+G\frac{M_\Gamma}{\frac{16R_\Gamma}{9}}\right)=$$

$$=m\left(\frac{-g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}+\frac{9g_0R_\Gamma^2}{16R_\Gamma}\right)=\frac{1}{16}mg_0R_\Gamma=4\cdot10^8\,J \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$As=W_B-\Delta K \quad \text{ή} \quad s=\frac{W_B-\Delta K}{A} \quad \text{ή} \quad s=10^9\,m$$

5.111) α) Κατά την περιφορά του διαστημικού οχήματος γύρω από τη Σελήνη η βαρυτική δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$G\frac{M_\Sigma(M+m)}{(R+h)^2}=(M+m)\frac{\upsilon^2}{R+h} \quad \text{ή} \quad \upsilon=\sqrt{\frac{GM_\Sigma}{R+h}}=\sqrt{\frac{20g_0R^2}{21R}}=\sqrt{\frac{20g_0R}{21}} \quad (1)$$

Κατά την απελευθέρωση της σεληνακάτου η ορμή του συστήματος όχημα-σεληνάκατος διατηρείται. Εάν υ' είναι η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος αμέσως μετά την απελευθέρωση της σεληνακάτου, έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad (M+m)\upsilon=M\upsilon' \quad \text{ή} \quad \upsilon'=\frac{(M+m)\upsilon}{M} \quad \text{ή} \quad \upsilon'=\frac{(M+m)}{M}\sqrt{\frac{20g_0R}{21}}=1.900\,m/s$$

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από το σημείο Α όπου ελευθερώθηκε η σεληνάκατος μέχρι το σημείο Σ στην επιφάνεια της Σελήνης:

$$\Delta K=W_B+W_F \quad \text{ή} \quad 0=m\left(V_A-V_\Sigma\right)+W_F \quad \text{ή}$$

$$W_F=-m\left(-G\frac{M_\Sigma}{R+h}+G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma}\right) \quad \text{ή} \quad W_F=-m\left(-\frac{20g_0R^2}{21R}+\frac{g_0R^2}{R}\right) \quad \text{ή}$$

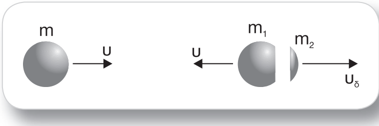
$$W_F=-\frac{g_0Rm}{21} \quad \text{ή} \quad W_F=-192\cdot10^6\,J$$

5.112) Στην κυκλική κίνηση του δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R+h} \quad \text{ή} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$$

Η ταχύτητα διαφυγής στο ύψος h είναι: $\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$ ή $\upsilon_\delta = \upsilon\sqrt{2}$

Κατά την έκρηξη ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Επομένως:



$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m\upsilon = -m_1\upsilon + m_2\upsilon_\delta$ ή

$m\upsilon = -m_1\upsilon + m_2\upsilon\sqrt{2}$ ή $m = -m_1 + m_2\sqrt{2}$ (1)

Αλλά: $m = m_1 + m_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$m_1 = m\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ και $m_2 = 2m\left(\sqrt{2} - 1\right)$

5.113) α) Οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Μεταξύ των πλανητών ασκείται δύναμη που παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης για κάθε πλανήτη.

Για τον πλανήτη μάζας m_1 ισχύει:

$$G\frac{m_1 m_2}{\ell^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{r_1} \quad \text{ή} \quad G\frac{m_2}{\ell^2} = \frac{\omega^2 r_1^2}{r_1} \quad \text{ή} \quad G\frac{m_2}{\ell^2} = \omega^2 r_1 \quad (1)$$

Ομοίως για τον πλανήτη μάζας m_2 ισχύει: $G\frac{m_1}{\ell^2} = \omega^2 r_2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

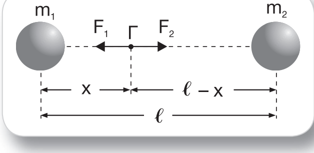
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{ή} \quad \frac{r_1}{r_2} = 4 \quad (3)$$

Αλλά: $r_1 + r_2 = \ell$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$r_1 = 42{,}69 \cdot 10^6\,\text{m}$ και $r_2 = 10{,}67 \cdot 10^6\,\text{m}$

β) Αρκεί το βλήμα να φτάσει στο σημείο Γ όπου η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδέν, όπως φαίνεται στο σχήμα.



$$G\frac{m_1 m}{x^2} = G\frac{m_2 m}{(\ell - x)^2} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\ell - x}{x}\right)^2 = 4 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\ell}{3} = \frac{40R_1}{3}$$

Εάν Α είναι το σημείο εκτόξευσης στην επιφάνεια του πρώτου πλανήτη, ισχύει:

$$V_A = -G\frac{m_1}{R_1} - G\frac{m_2}{39R_1} = -\frac{43}{39}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (5)$$

$$V_\Gamma = -G\frac{m_1}{\frac{40R_1}{3}} - G\frac{m_2}{\frac{80R_1}{3}} = -\frac{18}{80}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του βλήματος από το Α μέχρι το Γ, έχουμε:

$$\Delta K = W_B \quad ή \quad 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = m\left(V_A - V_\Gamma\right) \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει:

$\upsilon = 1.025,8 m/s$

Το παρόν ένθετο συνοδεύει το βιβλίο «*ΦΥΣΙΚΗ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – Β΄ ΤΟΜΟΣ*» του Χαράλαμπου Παπαθεοδώρου.

ISBN 978-960-16-5958-9

ΒΚΜ 09958

Δεν πωλείται χωριστά.