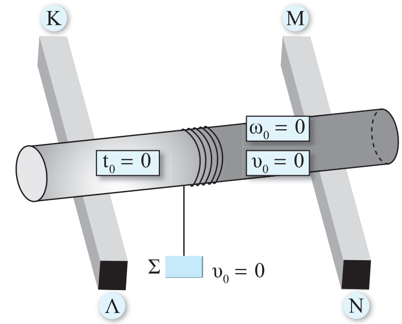
28. **Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 1\,kg$ και ακτίνας $R = 0{,}1\,m$ βρίσκεται ακίνητος πάνω σε δύο παράλληλες οριζόντιες ράβδους ΚΛ και ΜΝ. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει σώμα Σ μάζας $m = 1\,kg$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κατέρχεται, ενώ ο κύλινδρος ξεκινά αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στις ράβδους και το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Στο σώμα Σ ασκείται κατάλληλη οριζόντια δύναμη F έτσι ώστε το νήμα να παραμένει διαρκώς κατακόρυφο.**



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης α του σώματος και το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ και το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο κύλινδρος από την κάθε ράβδο.

δ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η γωνία στροφής του κυλίνδρου είναι 180 rad από τη στιγμή που ξεκίνησε.

ε) Να βρείτε το ύψος h που κατέβηκε το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1.

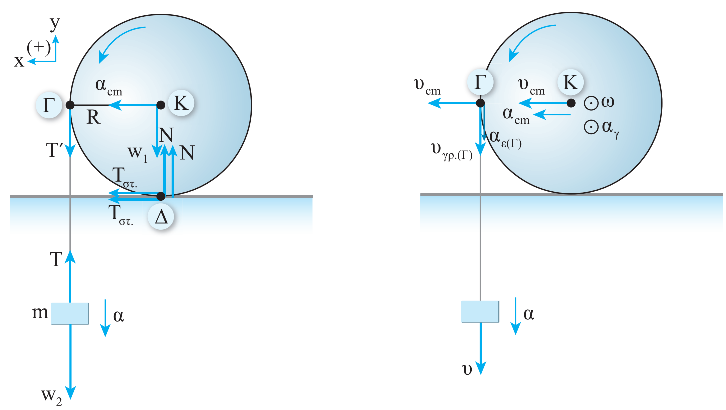
στ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_2 = 2t_1$.

ζ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε ο κύλινδρος στη χρονική διάρκεια $t_1 \to t_2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\,m/s^2$.

Λύση

$M = 1\,kg$, $R = 0{,}1\,m$, $m = 1\,kg$, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, $g = 10\,m/s^2$



α) $\alpha = ;$, $\alpha_{cm} = ;$

Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος.

Στον κύλινδρο ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_1$, η τάση $\vec{T}'$ του νήματος στο σημείο Γ, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από την κάθε ράβδο και η στατική τριβή $\vec{T}_{στ.}$ από την κάθε ράβδο, της οποίας δε γνωρίζουμε τη φορά.

Η αριστερόστροφη επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου εξασφαλίζεται από την τάση του νήματος $\vec{T}'$.

Οι δυνάμεις $\vec{w}_1$, $\vec{T}'$, $\vec{N}$ δεν μπορούν να εξασφαλίσουν την προς τα αριστερά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου. Άρα *η στατική τριβή $\vec{T}_{στ.}$ θα πρέπει να έχει φορά προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα.*

- Εφόσον το νήμα είναι αβαρές, ισχύει $T = T'$ (1).
- Εφόσον το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, ισχύουν:
  – *το μέτρο της ταχύτητας υ του σώματος Σ είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Γ, δηλαδή:* $\upsilon = \upsilon_{γρ.(Γ)} = \omega R$
  Εφόσον ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, είναι $\upsilon_{cm} = \omega R$. *Άρα* $\upsilon = \upsilon_{cm} = \omega R$ (2).
  – *το μέτρο της επιτάχυνσης α του σώματος Σ είναι ίσο με το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης* $\alpha_{\varepsilon(\Gamma)}$ *του σημείου Γ και είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης* α_{cm} *του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου, δηλαδή* $\alpha = \alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon(\Gamma)} = \alpha_\gamma R$ (3).

Ένας άλλος τρόπος είναι:

$$\upsilon = \upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} R \quad (3)$$

- *Συνοψίζοντας έχουμε:*

$T = T'$ (1)

$\upsilon = \upsilon_{cm} = \omega R$ (2)

$\alpha = \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} R$ (3)

Σώμα Σ

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow$$
$$w_2 - T = m\alpha \Rightarrow$$
$$mg - T = m\alpha \quad (4)$$

Επίσης $\begin{cases} \upsilon = \alpha t & (5) \\ x = \frac{1}{2}\alpha t^2 & (6) \end{cases}$

Κύλινδρος

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow$$
$$2T_{\sigma\tau.} = M\alpha_{cm} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$
$$2T_{\sigma\tau.} = M\alpha \quad (7)$$

Επίσης $\begin{cases} \upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t & (8) \\ x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 & (9) \end{cases}$

$$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha_{\gamma} \Rightarrow$$
$$T'R - 2T_{\sigma\tau.}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$
$$T - 2T_{\sigma\tau.} = \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$
$$T - 2T_{\sigma\tau.} = \frac{1}{2}M\alpha \quad (10)$$

Επίσης $\begin{cases} \omega = \alpha_{\gamma} t & (11) \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma} t^2 & (12) \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4), (7), (10) έχουμε:

$$mg - T + 2T_{\sigma\tau.} + T - 2T_{\sigma\tau.} = \left(m + M + \frac{1}{2}M\right)\alpha \Rightarrow mg = \left(m + M + \frac{1}{2}M\right)\alpha \Rightarrow 2{,}5\alpha = 10 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \alpha_{cm} = 4\,m/s^2}$$

β) $\alpha_{\gamma} = ;$

$$(3) \Rightarrow \alpha = \alpha_{\gamma} R \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{\alpha}{R} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{\gamma} = 40\,rad/s^2}$$

γ) $T = ;\ ,\quad T_{\sigma\tau.} = ;$

- $(4) \Rightarrow mg - T = m\alpha \Rightarrow T = mg - m\alpha \Rightarrow \boldsymbol{T = 6\,N}$
- $(7) \Rightarrow 2T_{\sigma\tau.} = M\alpha \Rightarrow T_{\sigma\tau.} = \dfrac{M\alpha}{2} \Rightarrow \boldsymbol{T_{\sigma\tau.} = 2\,N}$

δ) $\theta = 180\,rad\ ,\quad \upsilon = ;$

$$(12) \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha_{\gamma}}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 . 180}{40}}\ s \Rightarrow t_1 = 3\,s$$

$$(5) \Rightarrow \upsilon = \alpha t_1 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 12\,m/s}$$

ε) $0 \to t_1 = 3\,s\ ,\quad h = ;$

$$(6) \Rightarrow h = x = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2\ m \Rightarrow \boldsymbol{h = 18\,m}$$

στ) $t_2 = 2t_1 = 6\,s\ ,\quad \omega_2 = ;$

$$(11) \Rightarrow \omega_2 = \alpha_{\gamma} t_2 \Rightarrow \omega_2 = 40 \cdot 6\,rad/s \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 240\,rad/s}$$

ζ) $t_1 = 3\,s \to t_2 = 6\,s\ ,\quad N = ;$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\,s$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου είναι $\theta_1 = 180\,rad$.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6\,s$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου είναι:

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma} t_2^2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6^2\ rad \Rightarrow \theta_2 = 720\,rad$$

Στη χρονική διάρκεια $t_1 \to t_2$ η γωνία στροφής του κυλίνδρου είναι:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \Delta\theta = (720 - 180)\,rad \Rightarrow \Delta\theta = 540\,rad$$

Είναι $\Delta\theta = N \cdot 2\pi \Rightarrow N = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{N = \dfrac{270}{\pi}}$ **περιστροφές.**