# Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου

## Απαντήσεις στα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων

(2789, 2809, 3702, 3703, 3731, 3767, 3803, 3813, 4555, 4614, 4741, 4762, 4771, 4774, 4778, 4781, 4783, 4786, 4788, 4790, 4791, 4792, 4793, 4794, 4795, 4796, 4798, 4799, 4801, 4802, 4803, 4804, 13527)

Συγγραφή απαντήσεων: Θανάσης Τσιούμας

**Χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος της οθόνης για την πλοήγηση μέσα στο έγγραφο.**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

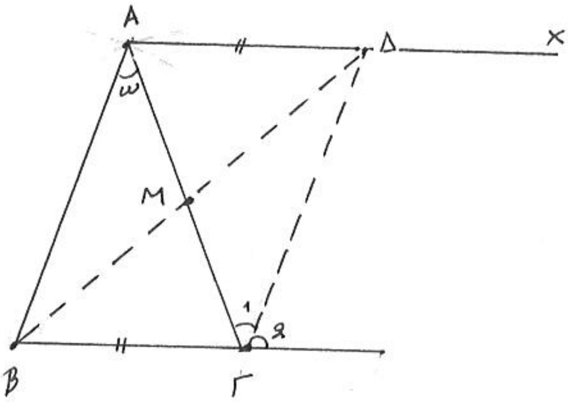
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

Λύση 3




α) Είναι ΑΔ =// ΒΓ οπότε το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιες διχοτομούνται, άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο θα έχουμε: ΑΒ//ΔΓ οπότε $\hat{Γ}_1=\hat{A}=ω$ (ως εντός εναλλάξ) όμως $\hat{Γ}_{εξ}=2ω \Leftrightarrow \hat{Γ}_1+\hat{Γ}_2=2ω \Leftrightarrow ω+\hat{Γ}_2=2ω$ άρα $\hat{Γ}_2=ω=\hat{Γ}_1$ επομένως η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$

γ) Είναι $\hat{B}=\hat{Γ}_2$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη) και $\hat{Γ}_2=ω$ άρα $\hat{B}=\hat{A}$ που σημαίνει ότι και ΓΑ=ΓΒ δηλαδή το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές

2809

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

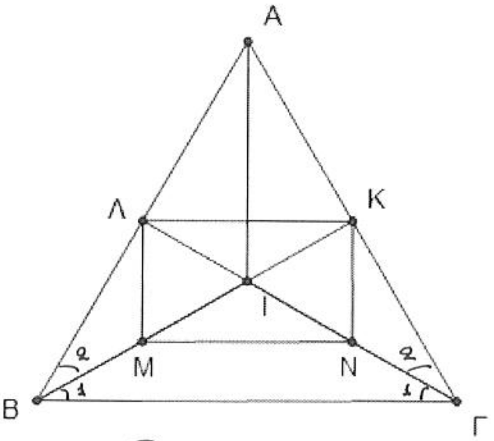
Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα (Μονάδες 5)

γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)




Λύση

α) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ είναι και διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, άρα $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = 30°$ οπότε το $\overset{\triangle}{ΒΙΓ}$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\overset{\triangle}{ΒΙΛ} = \overset{\triangle}{ΓΙΚ}$ αφού $ΒΙ = ΙΓ$ ($\overset{\triangle}{ΒΙΓ}$ ισοσκελές), $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2 = 30°$ και $ΒΛ = ΓΚ$ ως μισά ίσων πλευρών

γ) Το Ι είναι το βαρύκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ άρα η ΑΙ προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο της ΒΓ

δ) έχουμε $ΛΚ \overset{\parallel}{=} \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΜΝ \overset{\parallel}{=} \frac{ΒΓ}{2}$ άρα το ΛΜΝΚ είναι παραλληλόγραμμο με $Μ\hat{Λ}Κ = 90°$ (διότι ΛΜ//ΑΙ όπου $ΑΙ \perp ΒΓ$) άρα το ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

2ος τρόπος

είναι $ΙΜ = ΙΝ = ΙΚ = ΙΛ = \frac{1}{3}μ_β = \frac{1}{3}μ_γ$ ($μ_β = μ_γ$) δηλαδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΜΛΚΝ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα αυτό θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

3702

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ>ΑΔ και γωνία Α αμβλεία , να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

*Ισχυρισμός 1:* Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

*Ισχυρισμός 2:* Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

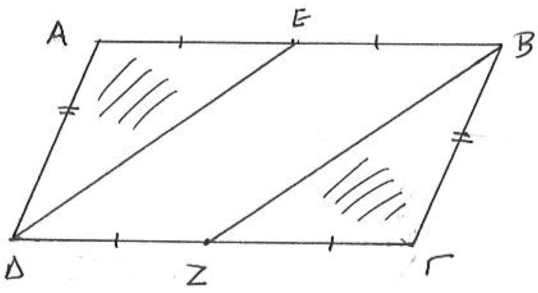
*Ισχυρισμός 3:* Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Λύση




α) • Ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής αφού το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο διότι $EB = // \Delta Z$

• Ο ισχυρισμός 2 επίσης είναι αληθής αφού $\overset{\triangle}{A\Delta E} = \overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ διότι $A\Delta = \Gamma B$, $AE = Z\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

• Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής διότι δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα αν $A\Delta = \frac{AB}{2} = AE$ και $B\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Gamma$

β) Για να είναι αληθής ο ισχυρισμός 3 πρέπει $A\Delta = AE = \frac{AB}{2}$ και $B\Gamma = \Gamma Z = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ δηλαδή η $AB = 2A\Delta$.

ΘΕΜΑ 4

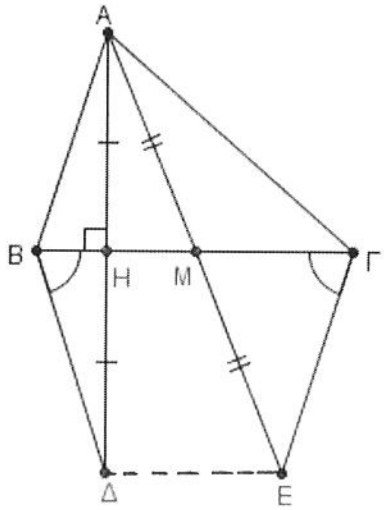
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΔ=ΓΕ (Μονάδες 8)

β) $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Η ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΔ, άρα αυτό είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ=ΒΔ (1)
$\overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{M\Gamma E}$ (ΑΜ=ΜΕ, ΒΜ=ΜΓ και $B\hat{M}A = E\hat{M}\Gamma$ ως κατακορυφήν)
άρα ΑΒ=ΓΕ (2)
Από (1),(2) έχουμε ΑΒ=ΒΔ=ΓΕ

β) από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΜ και ΜΓΕ προκύπτει ότι $B\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Gamma$ όμως $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta$ (αφού ΒΗ διχοτόμος του $A\hat{B}\Delta$)
άρα $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$

γ) Έχουμε Η το μέσο του ΑΔ, Μ το μέσο του ΑΕ άρα ΗΜ//ΔΕ οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ από το β).

3731

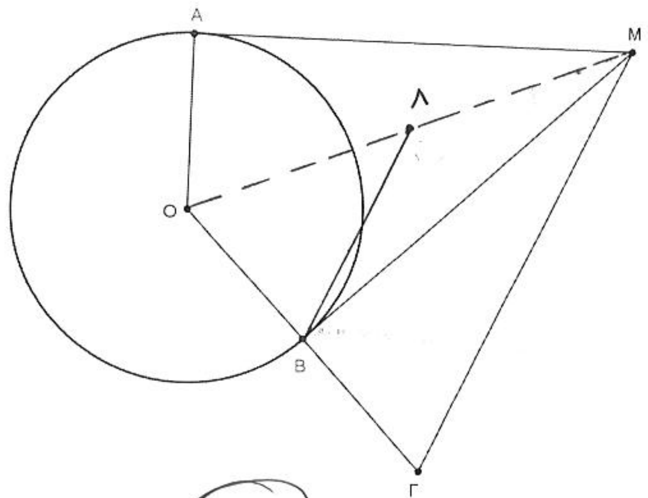
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του. Από το Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΜΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ΒΛ//ΜΓ. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Είναι $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ οπότε το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

β) Επειδή οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι ορθές, άρα θα είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο που σημαίνει ότι η ΟΜ θα είναι η διάμετρος του περιγγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ, επομένως το κέντρο Λ του κύκλου θα είναι το μέσο του ΟΜ

γ) Έχουμε Λ το μέσο του ΟΜ και Β το μέσο του ΟΓ οπότε ΒΛ//ΜΓ

ΘΕΜΑ 4

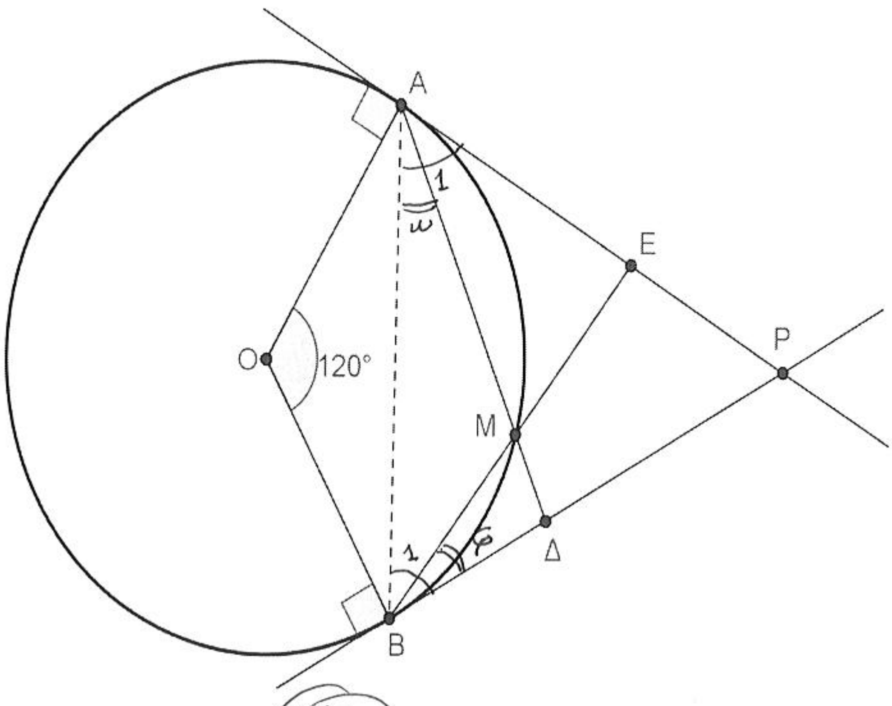
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του AOB ίση με $120^0$ . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P. Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις PB και PA στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ABΔ και PEB είναι ίσα. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \overset{*}{=} \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ οπότε στο τρίγωνο PAB και $\hat{P} = 60^\circ$ άρα το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο (* γωνία χορδής και εφαπτομένης)

β) Έχουμε $M\hat{A}B + M\hat{B}A = \frac{(\overset{\frown}{BM})}{2} + \frac{(\overset{\frown}{MA})}{2} = \frac{(\overset{\frown}{BMA})}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

γ) Τα τρίγωνα ABΔ και PEB έχουν:

- $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (γωνίες χορδής και εφαπτομένης)
- $\hat{B}_1 = \hat{P} = 60^\circ$
- $AB = BP$ (το $\overset{\triangle}{APB}$ είναι ισόπλευρο από το α))

Επομένως από το κριτήριο Γ-Π-Γ $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{PEB}$.

3803

ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ.

Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

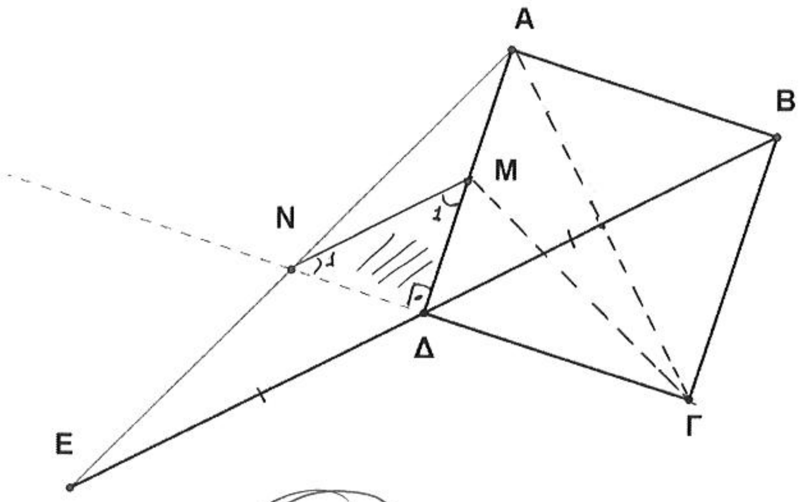
α) Να αποδείξετε ότι ΔΝ=ΔΜ. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$ (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma M \perp AN$ (Μονάδες 7)




Λύση

α) Είναι Δ το μέσο του ΕΒ και ΔΝ//ΒΑ άρα το Ν θα είναι το μέσο του ΑΕ οπότε $\Delta N = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = \Delta M$

β) Επειδή ΔΝ=ΔΜ το τρίγωνο ΝΜΔ θα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές άρα $\hat{N}_1 = \hat{M}_1 = 45^\circ$ και $\hat{\Delta} = 90^\circ$

γ) i. Έχουμε ΝΜ//ΔΒ και $A\Gamma \perp \Delta B$ άρα $NM \perp A\Gamma$

ii. Αφού $A\Delta \perp N\Gamma$ και $NM \perp A\Gamma$ το Μ θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΝΓ οπότε και το τρίτο ύψος θα περάσει από το Μ δηλαδή $\Gamma M \perp AN$.

3813

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα.

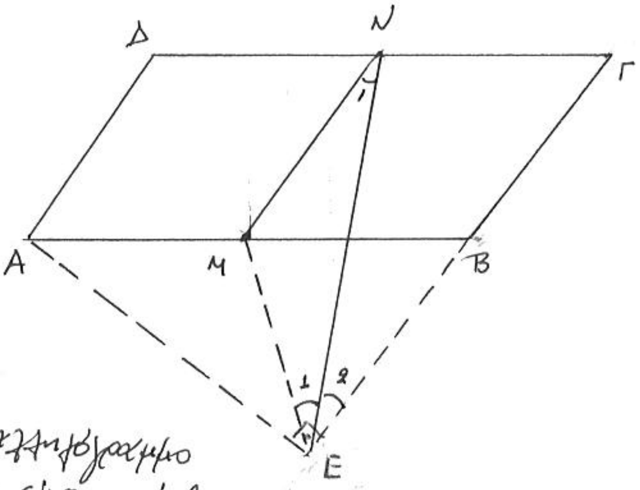
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{E}\Gamma$. (Μονάδες 8)

Λύση




α) Είναι $N\Gamma=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\frac{AB}{2}=MB$
και ΝΓ//ΜΒ άρα το
τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι παραλληλόγραμμο
και επειδή $MB=\frac{AB}{2}=B\Gamma$ θα είναι ρόμβος

β) Η ΕΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου
ΕΑΒ άρα $EM=\frac{AB}{2}=N\Gamma$ (1)
Επίσης ΜΝ//ΕΓ (2)
Από (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι
ισοσκελές τραπέζιο

γ) Επειδή ΜΕ=ΝΓ=ΜΝ (ΜΝΓΒ ρόμβος) το τρίγωνο ΜΝΕ είναι
ισοσκελές άρα $\hat{N}_1=\hat{E}_1$ (1)
Η $\hat{E}_2=\hat{N}_1$ (2) (ως εντός εναλλάξ) άρα από (1),(2) έχουμε
ότι η ΕΝ διχοτομεί τη γωνία $M\hat{E}\Gamma$.

4555

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

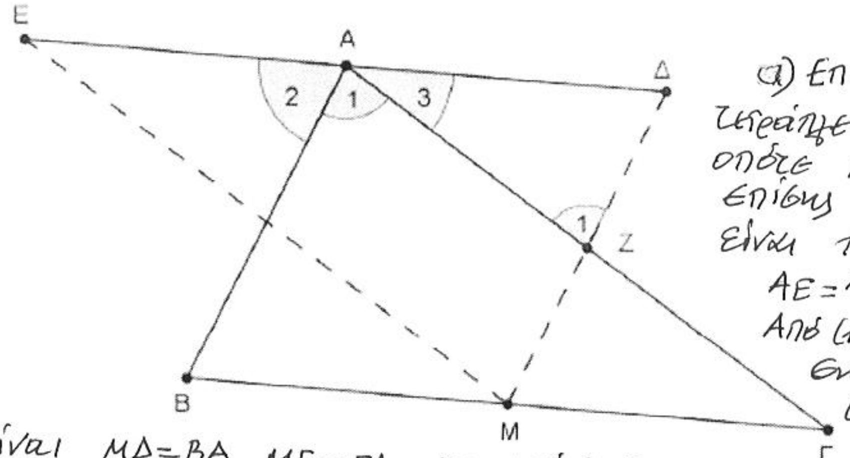
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^0$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^0$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)

Λύση




α) Επειδή ΜΔ =// ΒΑ το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παρ/μο οπότε ΑΔ =// ΒΜ (1)
Επίσης ΜΕ =// ΓΑ άρα το ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΕ =// ΜΓ (2)
Από (1),(2) προκύπτει ότι τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα.

β) Είναι ΜΔ=ΒΑ, ΜΕ=ΓΑ και από (1),(2) ΑΔ+ΑΕ=ΒΜ+ΜΓ ή ΔΕ=ΒΓ
Επομένως ΜΔ+ΜΕ+ΔΕ=ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ άρα τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΑΒΓ έχουν την ίδια περίμετρο

γ) Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $A\hat{\Delta}Z$ δεν είναι εντός εκτός και επί τα αυτά όπως ισχυρίστηκε ο μαθητής διότι δεν γνωρίζουμε ότι η ΔΕ είναι ευθεία που διέρχεται από το Α.

ΘΕΜΑ 4

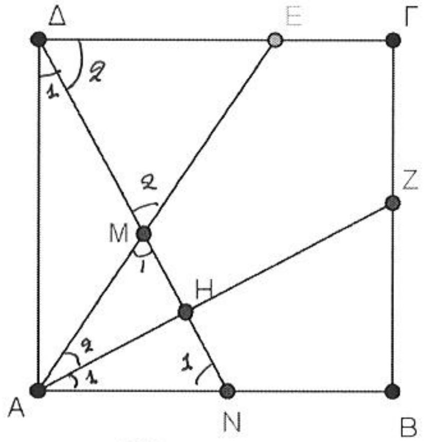
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ. (Μονάδες 10)

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ (Μονάδες 7)




Λύση

α) Είναι $\overset{\triangle}{A\Delta N} = \overset{\triangle}{ABZ}$ διότι είναι ορθογώνια ($\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$), $A\Delta = AB$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ (οξείες με κάθετες πλευρές $A\Delta \perp AB$ και $\Delta N \perp AZ$)

β) • Η ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος του $\overset{\triangle}{AMN}$ άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές οπότε $AM = AN$

• Η $\hat{\Delta}_2 = \hat{N}_1$ (ως εντός εναλλάξ) η $\hat{N}_1 = \hat{M}_1$ ($\overset{\triangle}{AMN}$ ισοσκελές) και $\hat{M}_2 = \hat{M}_1$ (ως κατακορυφήν) άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{M}_2$ που σημαίνει ότι $\overset{\triangle}{E\Delta M}$ ισοσκελές άρα $\Delta E = EM$

γ) Έχουμε $AE = AM + ME$ (1)

Είναι $AM = AN$ ($\overset{\triangle}{AMN}$ ισοσκελές) και $AN = BZ$ ($\overset{\triangle}{A\Delta N} = \overset{\triangle}{ABZ}$)

άρα $AM = BZ$ (2)

Επίσης $ME = \Delta E$ (από το β) (3)

Επομένως η (1) με βάση τις (2),(3) γράφεται

$AE = BZ + \Delta E$

ΘΕΜΑ 4

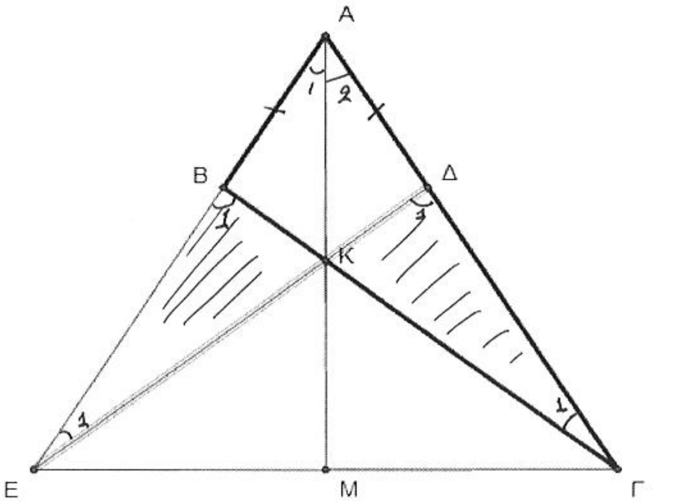
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΒ$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΓ = ΔΕ$ (Μονάδες 6)

β) $ΒΚ = ΚΔ$ (Μονάδες 7)

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ (ΑΒ=ΑΔ, ΑΕ=ΑΓ και $\hat{Α}$ κοινή)
οπότε ΒΓ=ΔΕ

β) Από την ισότητα των τριγώνων $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ προκύπτει ότι $\hat{Β} = \hat{Δ}$ άρα και $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ (παραπληρώματα ίσων γωνιών) και $\hat{Ε}_1 = \hat{Δ}_1$
Επομένως $\overset{\triangle}{ΚΕΒ} = \overset{\triangle}{ΚΓΔ}$ αφού έχουν και ΒΕ=ΔΓ (ΑΕ=ΑΓ και ΑΒ=ΑΔ)
άρα ΒΚ=ΚΔ

γ) $\overset{\triangle}{ΑΒΚ} = \overset{\triangle}{ΑΚΔ}$ (ΑΒ=ΑΔ, ΒΚ=ΚΔ και ΑΚ κοινή) οπότε
$\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ που σημαίνει ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

δ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος (από γ) του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΓ (ΑΕ=ΑΓ) άρα θα είναι ύψος και διάμεσος δηλαδή μεσοκάθετος της ΒΓ.

Θέμα 4

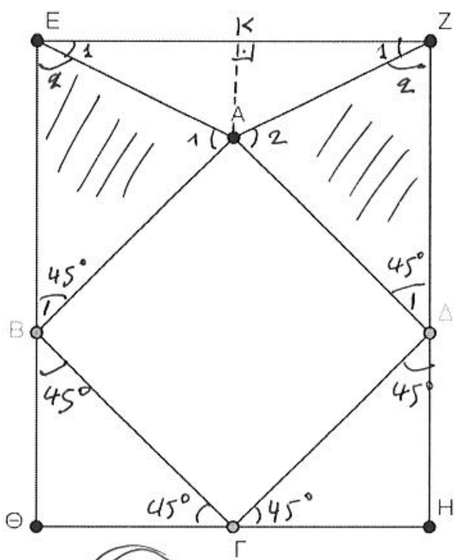
Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή Α → Β → Γ → Δ → Α που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι $45^{o}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ. (Μονάδες 8)




Λύση

α) i) Επειδή το Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΕΖ το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές οπότε ΑΕ=ΑΖ και $Ε_1=Ζ_1$, άρα και $\hat{Ε}_2=\hat{Ζ}_2$ επίσης $\hat{Β}_1=\hat{Δ}_1=45^{o}$ άρα τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΖ θα έχουν και τις γωνίες $Α_1$ και $Α_2$ ίσες, τελικά $\overset{\triangle}{ΑΕΒ}=\overset{\triangle}{ΑΖΔ}$ (Γ-Π-Γ)

ii) είναι $\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^{o}$ άρα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και αφού ΑΒ=ΑΔ (από $\overset{\triangle}{ΑΕΒ}=\overset{\triangle}{ΑΖΔ}$) θα είναι τετράγωνο

β) έστω ΑΖ=2ΑΚ (ΑΚ η απόσταση του Α από την ΕΖ), τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ η $\hat{Ζ}_1=30^{o}$ άρα $\hat{Ε}_1=30^{o}$ οπότε $Ε\hat{Α}Ζ=180^{o}-(30^{o}+30^{o})=120^{o}$.

ΘΕΜΑ 4

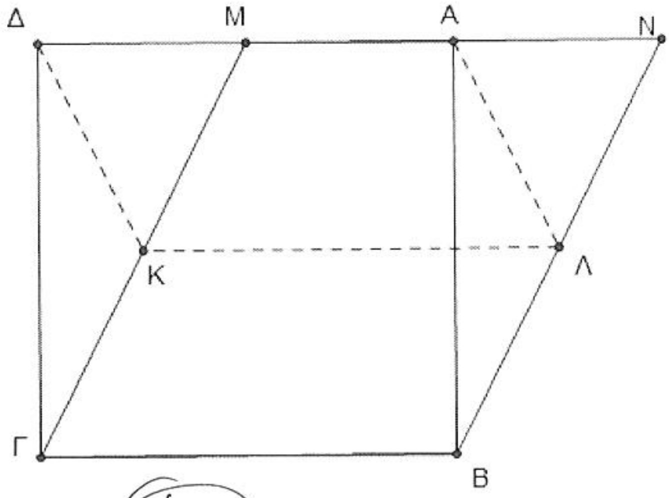
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α)κατά τμήμα ΑΝ= $\frac{ΑΔ}{2}$ . Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)




Λύση

α) Είναι ΜΝ =// ΓΒ διότι $ΜΝ = ΜΑ + ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΔ}{2} = ΑΔ$
επομένως το ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο

β) Επειδή το ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο θα έχουμε ΜΓ =// ΝΒ ή $\frac{ΜΓ}{2}$ =// $\frac{ΝΒ}{2}$ ή ΜΚ =// ΝΛ που σημαίνει ότι το ΜΝΛΚ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΚΛ =// ΜΝ ή ΚΛ =// ΔΑ (ΔΑ = ΜΝ) οπότε και το ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Είναι ΜΑ // ΚΛ άρα το ΑΜΚΛ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές, αφού $ΜΚ = \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΝΒ}{2}$ (1) (ΜΚΛΝ παραλ/μο) και $ΑΛ = \frac{ΝΒ}{2}$ (2) (ως διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΝ) οπότε από (1),(2) είναι ΜΚ = ΑΛ.

4774

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρω κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

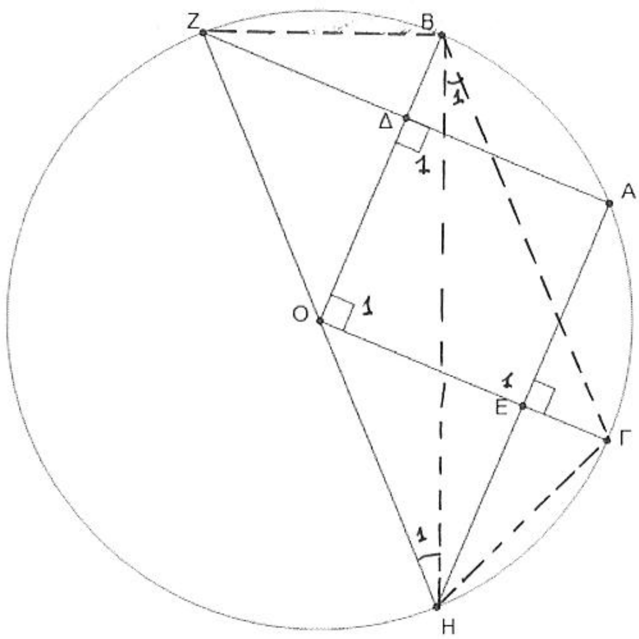
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΖ=ΑΗ . (Μονάδες 4)

β) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

γ) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)




Λύση

α) Το απόστημα ΟΔ της χορδής ΑΖ διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΖ δηλαδή το Β άρα $\widehat{AB}=\widehat{BZ}$ ομοίως Γ το μέσο του τόξου ΑΗ άρα $\widehat{A\Gamma}=\widehat{\Gamma H}$ Επίσης $\widehat{AB}=\widehat{A\Gamma}$ άρα $\widehat{AZ}=\widehat{AH}$ οπότε και ΑΖ=ΑΗ

β) Είναι $\hat{O}_1=\hat{\Delta}_1=\hat{E}_1=90^\circ$ άρα το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο

γ) Επειδή από το β) το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο η $\hat{A}=90^\circ$ άρα βαίνει σε ημικύκλιο οπότε η ΖΗ είναι διάμετρος, άρα τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά

δ) Είναι $\widehat{H\Gamma}=\widehat{BZ}$ άρα οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{H}_1$ είναι ίσες οπότε ΒΓ//ΖΗ επομένως το ΒΓΗΖ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΒΖ=ΓΗ ($\widehat{BZ}=\widehat{\Gamma H}$)

4778

ΘΕΜΑ 4

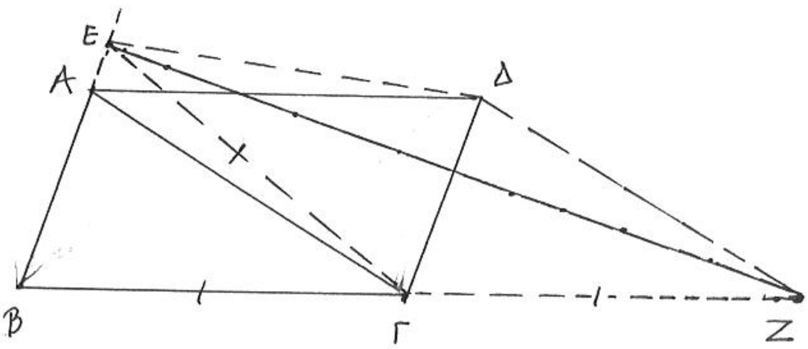
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ και Β<90° θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΔΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

Λύση 2




α) Είναι $ΕΓ = ΒΓ = ΓΖ$ δηλαδή $ΕΓ = \frac{ΒΖ}{2}$ οπότε η $Β\hat{Ε}Ζ = 90°$

β) Έχουμε $ΑΕ // ΓΔ$ άρα το ΑΕΔΓ είναι τραπέζιο και επειδή $ΕΓ=ΒΓ=ΑΔ$ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο

γ) είναι $ΓΖ =// ΑΔ$ αφού $ΓΖ = ΒΓ$ επομένως το τετράπλευρο ΑΓΖΔ θα είναι παραλληλόγραμμο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K}\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

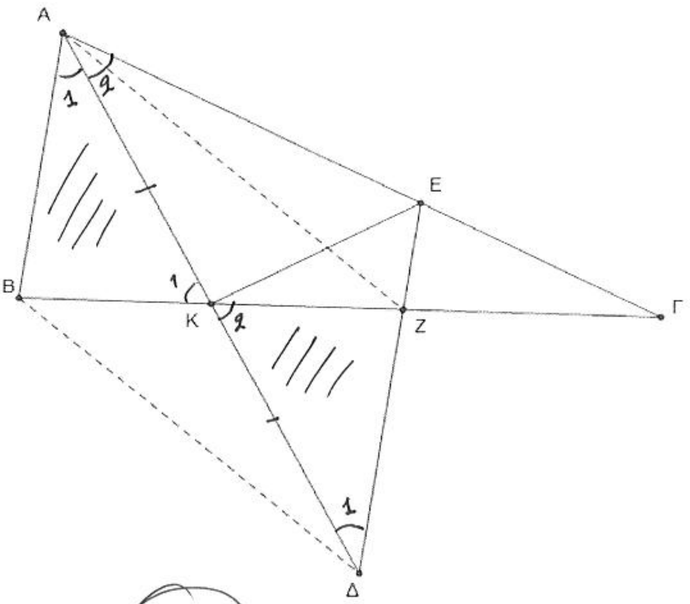
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ (ΑΒ//ΔΖ) και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΑΚ διχοτόμος) οπότε $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_1$ άρα το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές

β) Η ΕΚ είναι διάμεσος (ΑΚ=ΚΔ) του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΔ άρα θα είναι και ύψος οπότε η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ

γ) Έχουμε $\overset{\triangle}{AKB}=\overset{\triangle}{K\Delta Z}$ αφού ΑΚ=ΚΔ, $\hat{K}_1=\hat{K}_2$ (κατακορυφήν) και $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

δ) Από $\overset{\triangle}{AKB}=\overset{\triangle}{K\Delta Z}$ προκύπτει ΔΖ=ΒΑ όμως ΔΖ//ΒΑ άρα το ΑΒΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.

4783

ΘΕΜΑ 4

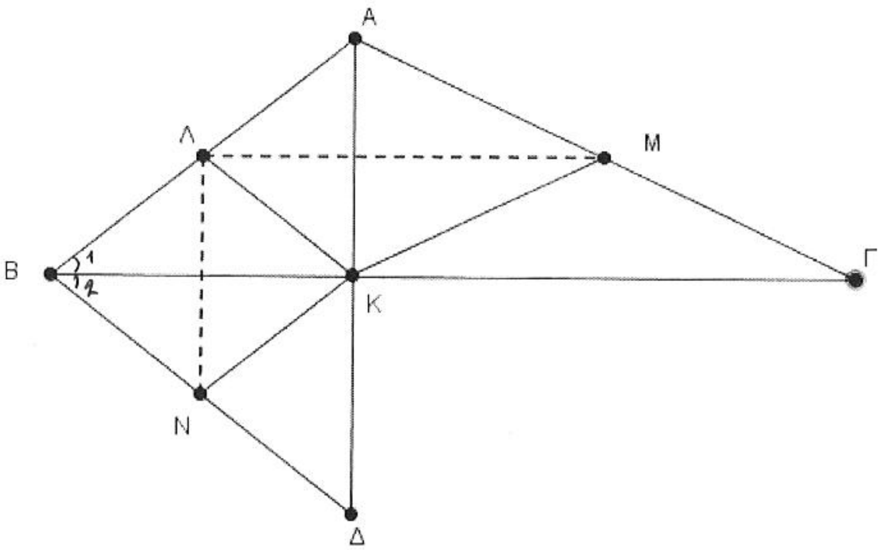
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K}\Delta$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $\Lambda\mathrm{M} \perp \Lambda\mathrm{N}$ (Μονάδες 9)




Λύση

α) Η ΒΚ είναι ύψος (ΒΚ⊥ΑΚ) και διάμεσος (ΔΚ=ΚΑ) του τριγώνου ΑΒΔ άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές

β) Είναι Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΑΔ άρα $\Lambda K =// \frac{B\Delta}{2}$ ή $\Lambda K =// BN$ που σημαίνει ότι το ΒΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο και αφού η ΒΚ διχοτομεί τη γωνία Β ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$) το ΒΛΚΝ είναι ρόμβος

γ) Οι διαγώνιες ΛΝ και ΒΚ είναι κάθετες δηλαδή $\Lambda N \perp BK$ (1)
Όμως $\Lambda M // B\Gamma$ (2) (Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα)
οπότε από (1),(2) είναι $\Lambda N \perp \Lambda M$.

4786

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

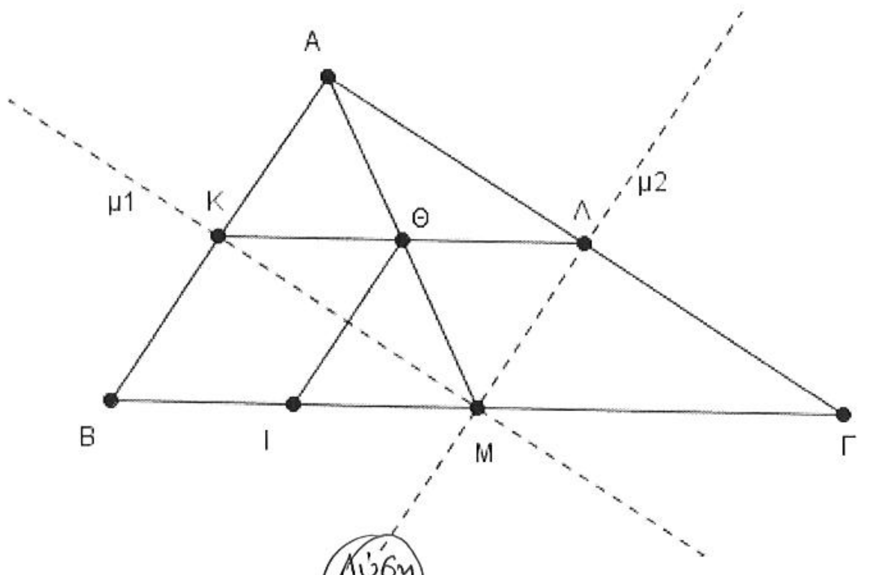
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

iii. $ΛΘ = \frac{ΒΓ}{4}$ , όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. (Μονάδες 6)

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)




Λύση

α) i) Το Μ ανήκει στη μεσοκάθετη $μ_1$ άρα ισχύει ΜΑ=ΜΒ ομοίως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετη $μ_2$ άρα ΜΑ=ΜΓ οπότε έχουμε $ΜΑ = \frac{ΒΓ}{2}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

ii) είναι $\hat{A}=\hat{K}=\hat{Λ}=90^o$ οπότε το ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο

iii) Θ το μέσο του ΑΜ και Λ το μέσο του ΑΓ άρα $ΘΛ = \frac{ΜΓ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$

β) Επειδή τα Κ,Θ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΜ αντίστοιχα άρα $ΚΘ =// \frac{ΒΜ}{2}$ ή $ΚΘ =// \frac{ΒΓ}{4}$ όμως $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$ άρα $ΚΘ =// ΒΙ$ επομένως το ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

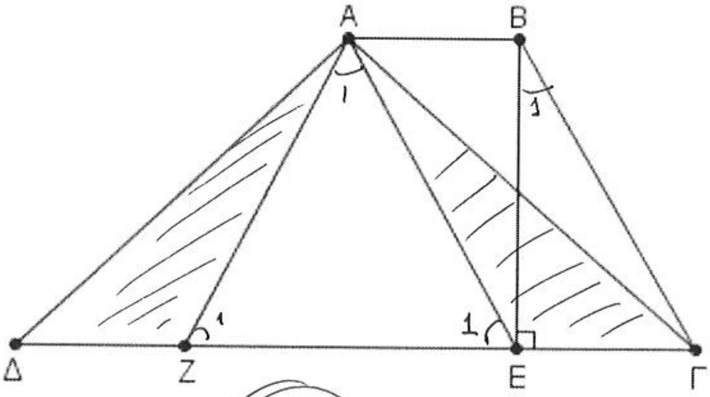
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ // ΓΔ$, $ΔΓ = 4ΑΒ$ και $ΒΓ = 2ΑΒ$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $ΔΖ = ΑΒ$. Αν η γωνία Γ είναι $60^0$ και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Αφού $\hat{B}_1+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1=30^\circ$ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΕΓ=\frac{ΒΓ}{2}=ΑΒ$ άρα ΕΓ=//ΑΒ οπότε το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο

β) Είναι $ΖΕ = ΔΓ - ΔΖ - ΕΓ = 4ΑΒ - ΑΒ - ΑΒ = 2ΑΒ$ (αφού $ΔΖ=ΑΒ$, $ΕΓ=ΑΒ$) άρα $ΖΕ = ΕΑ$ αφού $ΕΑ=ΒΓ=2ΑΒ$. Επομένως το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές και αφού $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}=60^\circ$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ΕΑ//ΒΓ) θα είναι $\hat{Z}_1=\hat{A}_1=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60$ άρα το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο

γ) Έχουμε $\overset{\triangle}{ΔΑΖ}=\overset{\triangle}{ΓΑΕ}$ αφού $ΑΖ=ΑΕ$, $ΔΖ=ΕΓ$ και $Δ\hat{Z}Α=Α\hat{E}Γ=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

4790

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$ και ΑΔ= ΒΓ =ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

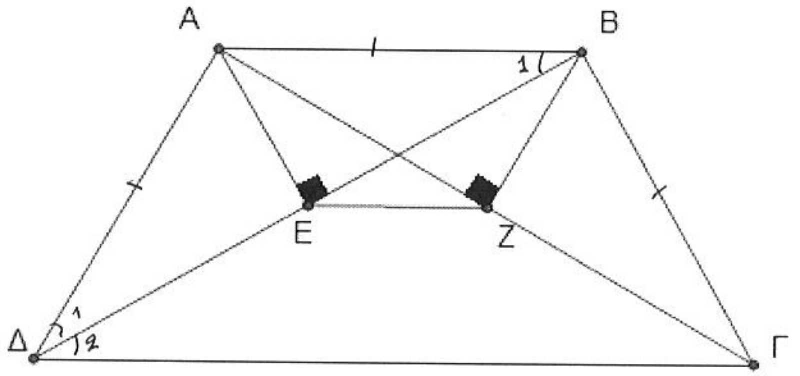
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β) ΑΕ =ΒΖ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)




Λύση

α) Η ΒΖ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ άρα θα είναι και διάμεσος δηλαδή Ζ το μέσο της ΑΓ, ομοίως Ε το μέσο της ΒΔ αφού η ΑΕ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ

β) Είναι $\overset{\triangle}{EAB}=\overset{\triangle}{AZB}$ αφού είναι ορθογώνια ($\hat{E}=\hat{Z}=90^\circ$), ΑΒ κοινή και $E\hat{A}B=A\hat{B}Z$ ως μισά των ίσων γωνιών Α και Β του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ

γ) Επειδή Ε, Ζ τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου άρα ΕΖ//ΑΒ και αφού ΑΕ=ΒΖ (από το β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο

δ) έχουμε $\hat{\Delta}_2=\hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ αφού ΑΒ//ΔΓ) και $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_1$ επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

4791

ΘΕΜΑ 4

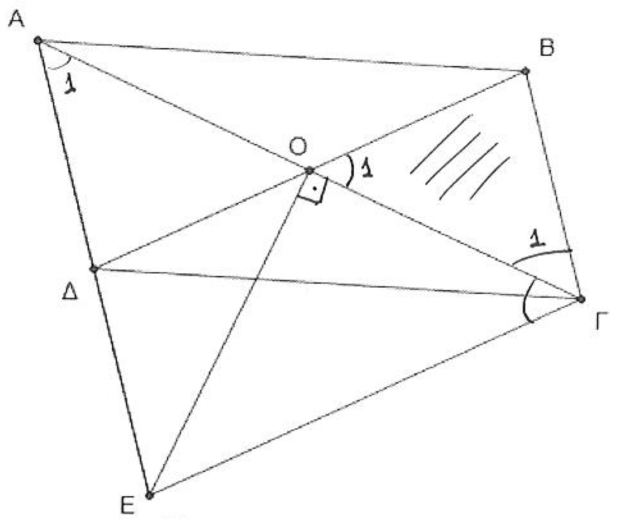
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Η ΕΟ είναι διάμεσος (ΟΑ=ΟΓ) και ύψος ($EO \perp O\Gamma$) του τριγώνου ΑΕΓ, άρα αυτό θα είναι ισοσκελές

β) Είναι ΔΕ=ΑΔ όπου ΑΔ=//ΒΓ άρα ΔΕ=//ΒΓ οπότε το ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Επειδή ΑΕ//ΒΓ η $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ και $E\hat{\Gamma}A=\hat{A}_1$ (2) αφού $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$ ισοσκελές, όμως $\hat{O}_1=E\hat{\Gamma}A$ (3) ως εντός εναλλάξ, οπότε από (1),(2),(3) έχουμε $\hat{O}_1=\hat{\Gamma}_1$ άρα το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

4792

ΘΕΜΑ 4

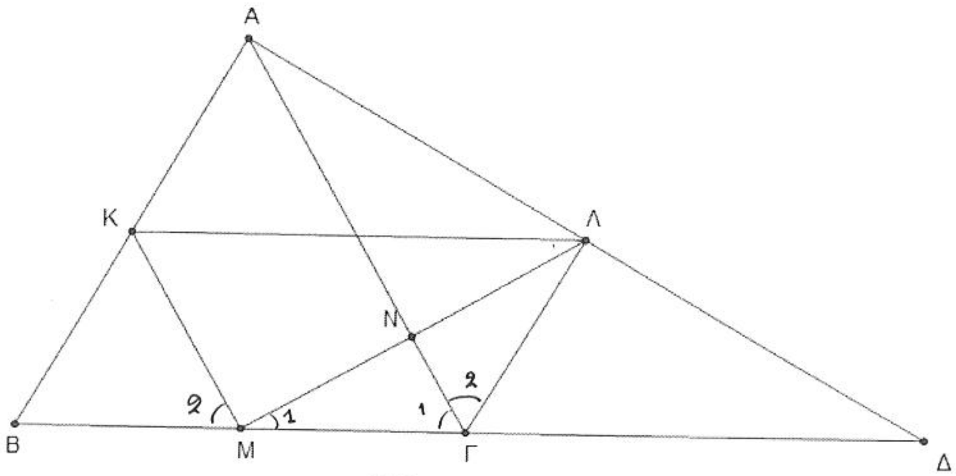
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)




Λύση

α) Είναι $A\Gamma = B\Gamma = \Gamma\Delta$ οπότε $A\Gamma = \frac{B\Delta}{2}$ άρα $B\hat{A}\Delta = 90^\circ$
η $\hat{B} = 60^\circ$ οπότε $\hat{\Delta} = 30^\circ$

β) i) Τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα, άρα ΚΛ // ΒΓ οπότε ΚΛ // ΜΓ επομένως το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού $KM = \frac{A\Gamma}{2}$, $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$ και $AB = A\Gamma$ οπότε $KM = \Lambda\Gamma$

Είναι $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$ (1) και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Delta}{2}}{2} = \frac{B\Delta}{4}$ (2)

Επομένως από (1),(2) προκύπτει ότι η μεγάλη βάση $K\Lambda = 2M\Gamma$

ii) Το τρίγωνο ΓΜΛ είναι ισοσκελές διότι $\Gamma M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \Gamma\Lambda$
Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$ (αφού $\hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ) οπότε η διχοτόμος ΓΝ θα είναι και ύψος οπότε $\hat{M}_1 = 30^\circ$ επίσης $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά)
Επομένως $K\hat{M}\Lambda = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ άρα το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

4793

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

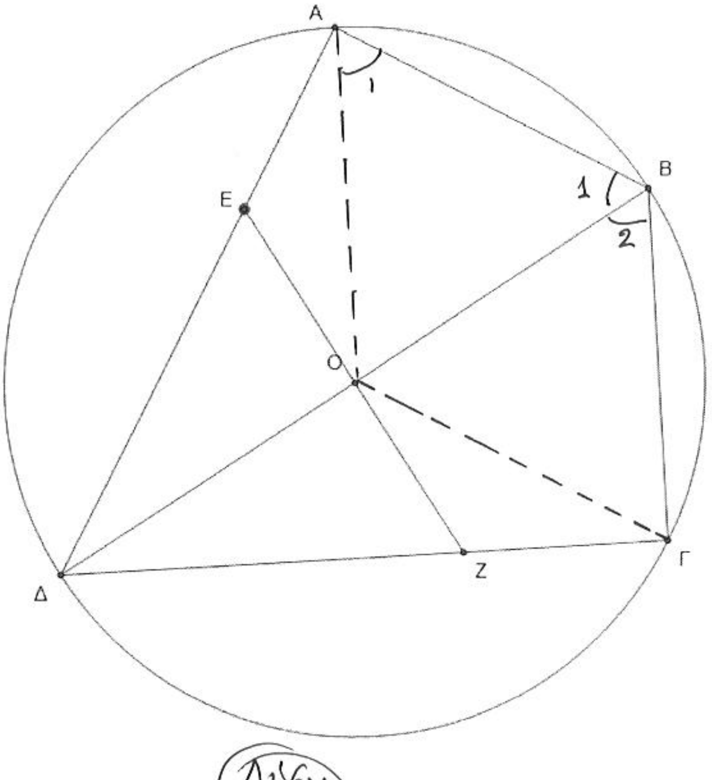
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90^\circ$ ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλια
οπότε $\hat{B}+\hat{\Delta}=180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}+\hat{\Delta}=180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Delta}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^\circ$ άρα $\hat{B}=120^\circ$

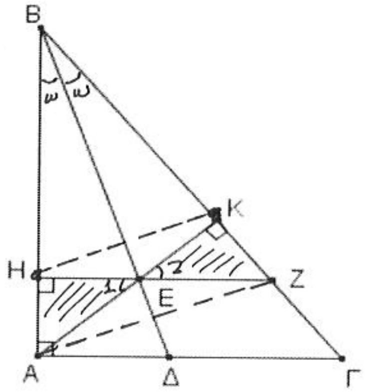
β) Έχουμε $\overset{\triangle}{\Delta A B}=\overset{\triangle}{\Gamma B \Delta}$ αφού $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90^\circ$, ΒΔ κοινή και ΑΒ=ΒΓ

γ) Είναι $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$ και ΟΑ=ΟΒ=ρ άρα και $\hat{A}_1=\hat{B}_1=60^\circ$
οπότε ΑΒ=ΟΑ=ΟΓ=ΒΓ που σημαίνει ότι το ΑΒΓΟ είναι ρόμβος

δ) Επειδή $\hat{A}=90^\circ$ και $E\hat{O}B=90^\circ$ άρα $\hat{A}+E\hat{O}B=180^\circ$ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.




α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ αφού ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{B}$ άρα ΕΗ = ΕΚ οπότε $\overset{\triangle}{EHA} = \overset{\triangle}{EKZ}$ αφού είναι ορθογώνια και $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (ως κατακορυφήν)

ii. Είναι $\overset{\triangle}{BHE} = \overset{\triangle}{BEZ}$ αφού $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, $H\hat{B}E = E\hat{B}K = \omega$ και ΕΗ = ΕΚ

άρα ΒΗ = ΒΚ οπότε $\overset{\triangle}{BKH}$ είναι ισοσκελές

iii. Έχουμε ΒΑ = ΒΗ + ΗΑ = ΒΚ + ΚΖ = ΒΖ (αφού ΒΗ = ΒΚ και ΗΑ = ΚΖ)

άρα $\overset{\triangle}{BAZ}$ ισοσκελές οπότε η διχοτόμος $B\Delta \perp AZ$

β) Αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές τότε το ύψος ΑΚ θα είναι και διχοτόμος οπότε το Ε θα είναι το έγκεντρο του τριγώνου άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.

4795

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

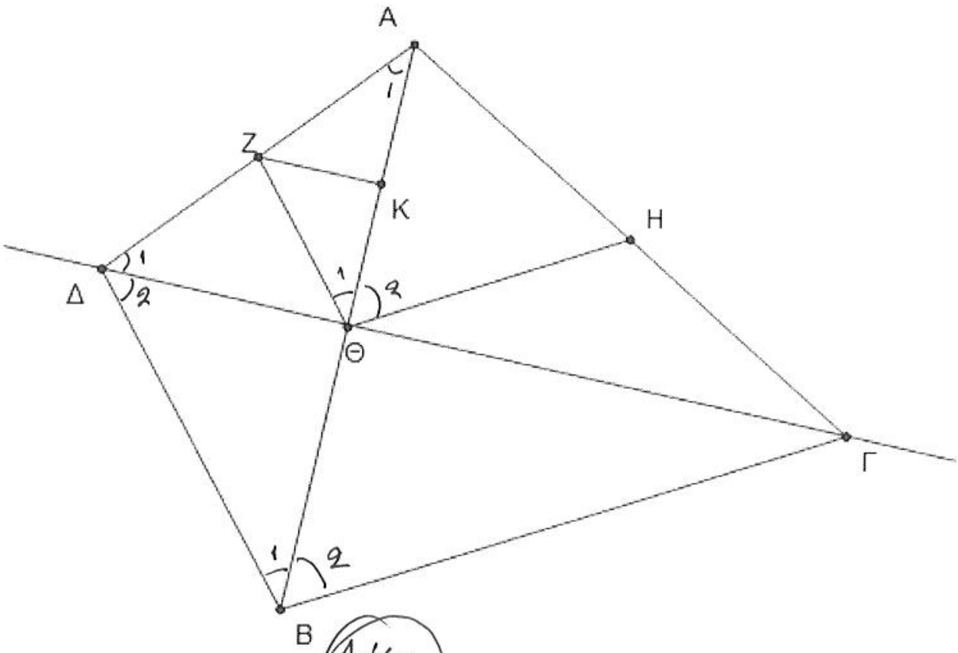
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\hat{\Theta}H$ είναι ορθή.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

(Μονάδες 8)




Λύση

α) Είναι $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ (ΑΔ=ΔΒ, ΑΓ=ΓΒ και ΔΓ κοινή) οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ άρα η διχοτόμος ΔΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΑΒ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΒ

β) Έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1 = 30^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) αφού Ζ, Θ τα μέσα των ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα άρα ΖΘ//ΔΘ. Ομοίως ΘΗ//ΒΓ άρα $\hat{\Theta}_2 = \hat{B}_2 = 60^\circ$
Επομένως $Z\hat{\Theta}H = \hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

γ) Αφού $\hat{A}_1 = 30^\circ$ και $\hat{K} = 90^\circ$ άρα $ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

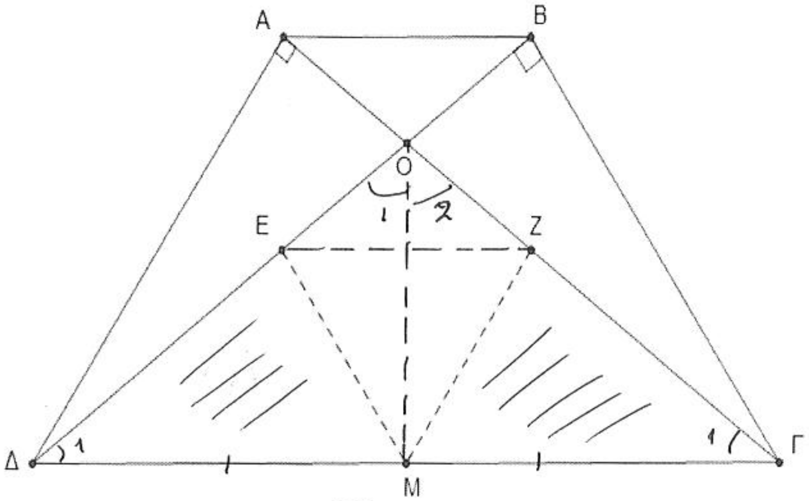
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΜΔΕ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΜΖΓ}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)




Λύση

α) Αφού Μ, Ε τα μέσα των ΔΒ και ΔΓ αντίστοιχα άρα $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$ (1) επίσης $ΜΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ (2) (Μ, Ζ τα μέσα των ΔΓ, ΑΓ)
από (1),(2) είναι ΜΕ=ΜΖ αφού ΑΔ=ΒΓ

β) Είναι ΜΖ // ΑΔ και ΑΔ ⊥ ΑΓ άρα ΜΖ ⊥ ΑΓ

γ) ΜΕ ⊥ ΒΔ αφού ΜΕ // ΒΓ και ΒΓ ⊥ ΒΔ άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΔΜ και $\overset{\Delta}{\text{ΜΖΓ}}$ είναι ίσα αφού έχουν ΜΕ=ΜΖ και ΜΔ = ΜΓ

δ) Αφού $\overset{\Delta}{\text{ΜΔΕ}} = \overset{\Delta}{\text{ΜΖΓ}}$ άρα $\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ οπότε $\overset{\Delta}{\text{ΟΔΓ}}$: ισοσκελές άρα η διάμεσος ΟΜ θα είναι και διχοτόμος της $\hat{ΔΟΓ}$.
Επομένως η διχοτόμος της $\hat{ΕΟΖ}$ θα είναι και μεσοκάθετος της ΕΖ

4797

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

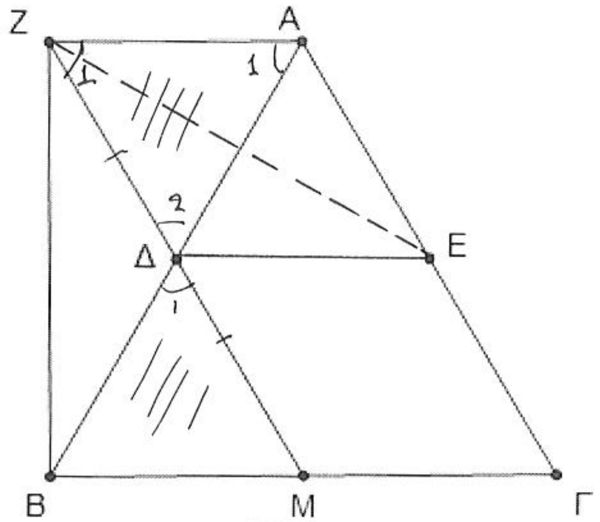
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ και $\overset{\Delta}{BM\Delta}$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. (Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι $\overset{\Delta}{AZ\Delta} = \overset{\Delta}{BM\Delta}$ ( $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ κατακορυφήν, $M\Delta = \Delta Z$ και $B\Delta = \Delta A$)

β) Αφού $\overset{\Delta}{AZ\Delta} = \overset{\Delta}{BM\Delta}$ $AZ = BM = M\Gamma$ και $\hat{A}_1 = \hat{B} = 60°$
άρα $AZ =// BM$ οπότε $AZ =// M\Gamma$ επομένως το
ΑΖΜΓ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Επειδή $\Delta E =// M\Gamma$ άρα και $ZA =// \Delta E$ που σημαίνει ότι
το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE$
θα είναι ρόμβος, επομένως οι διαγώνιοι ΖΕ και ΑΔ θα
τέμνονται κάθετα και θα διχοτομούνται.

δ) Είναι $Z\Delta = \Delta A$ (αφού το $\overset{\Delta}{ZA\Delta}$ είναι ισόπλευρο $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2 = \hat{Z}_1 = 60°$)
άρα $Z\Delta = \frac{AB}{2}$ οπότε $A\hat{Z}B = 90°$ άρα $BZ \perp AZ$.

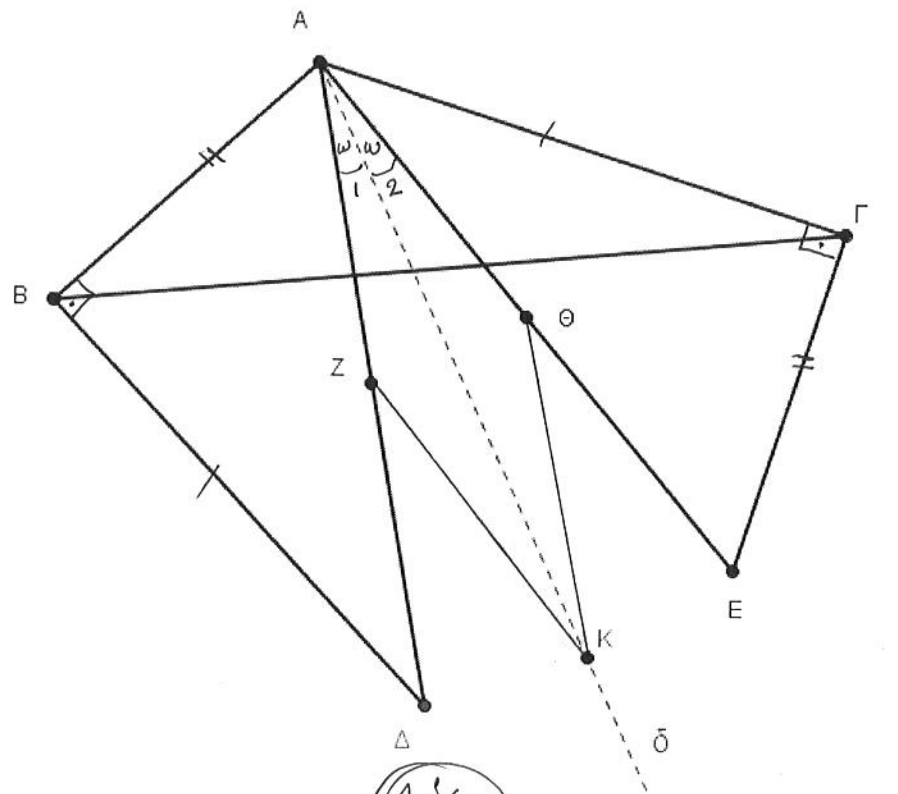
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με ΑΒ<ΑΓ και $\hat{A} > 90^0$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε ΚΖ=ΑΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)




Λύση

α) $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^0$, ΑΒ=ΓΕ και ΒΔ=ΑΓ) άρα ΑΔ=ΑΕ

β) Έχουμε $\overset{\triangle}{AZK} = \overset{\triangle}{A\Theta K}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \omega$, ΑΚ κοινή και ΑΖ=ΑΘ ως μισά των ίσων ΑΔ και ΑΕ)
άρα ΚΖ=ΚΘ

γ) Είναι ΚΖ=ΚΘ και ΑΘ=ΑΖ όμως ΑΖ=ΖΚ άρα το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με ΑΔ=ΑΕ. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ τα μέσα των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZAH}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ έγραψε τα εξής:

« 1. *ΑΔ=ΑΕ από υπόθεση*

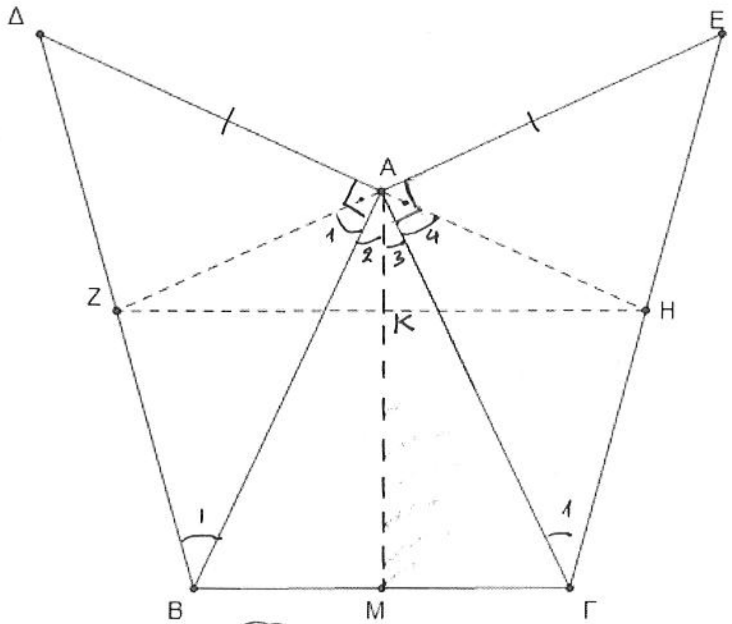
*2. ΑΒ=ΑΓ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου*

*3.* $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ *ως κατακορυφήν*

*Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».*

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

(Μονάδες 5)




β) Λάθος είναι το βήμα 3 αφού οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και ΕΑΓ δεν είναι κατακορυφήν

Λύση

α) i. $\overset{\Delta}{A\Delta B} = \overset{\Delta}{AE\Gamma}$ ($\Delta\hat{A}B = \Gamma\hat{A}E = 90^\circ$, $A\Delta = AE$ και $AB = A\Gamma$)

ii. Είναι $\Delta\hat{A}B = 90^\circ$ και Ζ μέσο της υποτείνουσας ΔΒ άρα $AZ = \frac{\Delta B}{2}$ (1) ομοίως $AH = \frac{E\Gamma}{2}$ (2) ως διάμεσος στην υποτείνουσα του $\overset{\Delta}{AE\Gamma}$. Όμως $\Delta B = E\Gamma$ (αφού $\overset{\Delta}{A\Delta B} = \overset{\Delta}{AE\Gamma}$) οπότε από (1),(2) είναι $AZ = AH$ άρα $\overset{\Delta}{ZAH}$ είναι ισοσκελές.

iii. Το $\overset{\Delta}{ZAB}$ ισοσκελές άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_4$ (αφού $\overset{\Delta}{\Delta AB} = \overset{\Delta}{\Gamma AE}$ και $AH = H\Gamma$). Η διάμεσος ΑΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι και διχοτόμος άρα $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$ οπότε $Z\hat{A}M = M\hat{A}H$ άρα η διχοτόμος ΑΚ του ισοσκελούς $\overset{\Delta}{AZH}$ θα είναι και μεσοκάθετος της

4801

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\overset{\Lambda}{A}=120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

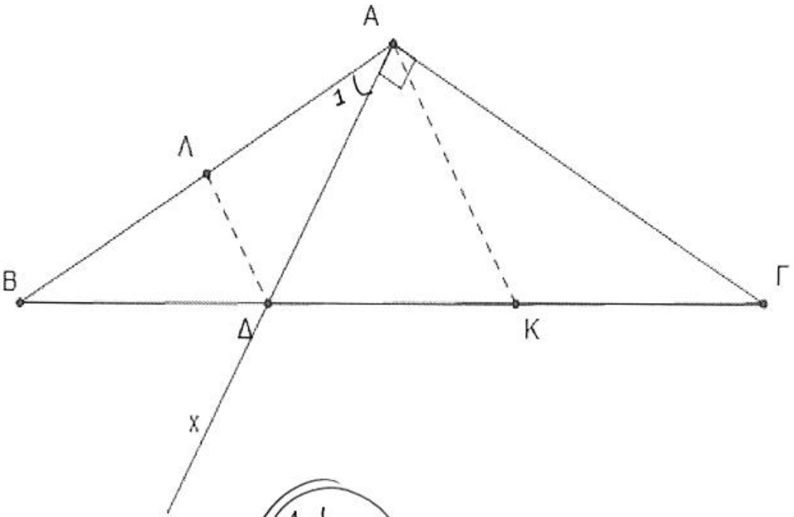
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta // AK$ (Μονάδες 5)

δ) ΑΚ=2ΛΔ (Μονάδες 4)




Λύση

α) Είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$ και $\hat{A}_1=120^\circ-90^\circ=30^\circ$
οπότε $\hat{A}_1=\hat{B}=30^\circ$ άρα $A\overset{\Delta}{\Delta}B$ είναι ισοσκελές

β) Αφού $\Delta\hat{A}\Gamma=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$ άρα $A\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2}$ και από α) $B\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2}$
ή $\Delta\Gamma=2B\Delta$

γ) Έχουμε $B\Delta=\frac{\Delta\Gamma}{2}=\Delta K$ άρα Δ το μέσο του ΒΚ και Λ το μέσο του ΒΑ άρα $\Delta\Lambda // AK$

δ) Από το γ) έχουμε $\Lambda\Delta=\frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK=2\Lambda\Delta$

ΘΕΜΑ 4

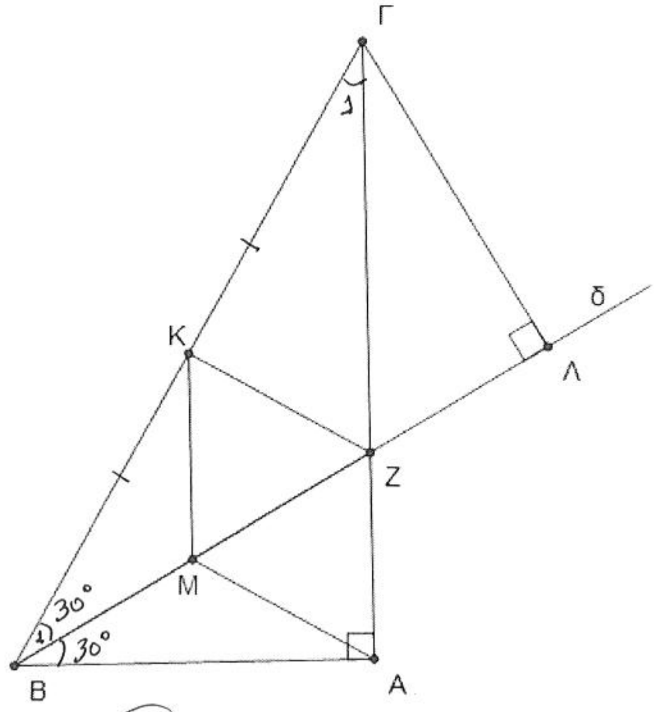
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ με $\hat{\text{Α}} = 90^o$ και $\hat{\text{Β}} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΒΖΓ}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\text{ΓΖ} = 2\text{ΖΑ}$ (Μονάδες 7)

δ) $\text{ΒΛ} = \text{ΑΓ}$ (Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1 = 30°$ άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΒΖΓ}}$ είναι ισοσκελές

β) Η ΖΚ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΖΓΒ άρα θα είναι και ύψος δηλαδή $\text{Β}\hat{\text{Κ}}\text{Ζ} = 90°$ και αφού $\hat{B}_1 = 30°$ η $\text{ΚΖ} = \frac{\text{ΒΖ}}{2} = \text{ΜΖ} = \text{ΚΜ}$ επίσης $\text{ΑΜ} = \text{ΜΖ} = \text{ΖΑ}$ επομένως $\text{ΚΖ} = \text{ΖΑ} = \text{ΑΜ} = \text{ΚΜ}$ οπότε το ΑΜΚΖ είναι ρόμβος

γ) Είναι $\text{ΖΑ} = \frac{\text{ΒΖ}}{2} = \frac{\text{ΓΖ}}{2}$ από το α) άρα $\text{ΓΖ} = 2\text{ΖΑ}$

δ) Έχουμε $\overset{\Delta}{\text{ΒΓΛ}} = \overset{\Delta}{\text{ΒΑΓ}}$ αφού $\hat{\text{Α}} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΒΓ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 30°$ οπότε $\text{ΒΛ} = \text{ΑΓ}$.

4803

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε ΑΜ=ΑΒ. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{AK}$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

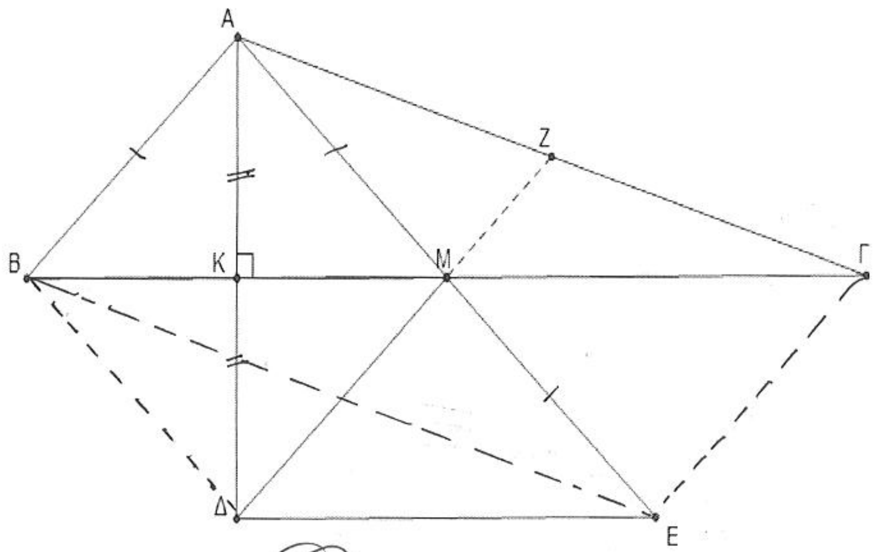
Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{\Delta E} = 2\mathrm{KM}$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)




Λύση

α) Είναι Κ το μέσο του ΑΔ και Μ το μέσο του ΑΕ άρα $\mathrm{KM} \overset{//}{=} \frac{\mathrm{\Delta E}}{2}$ (1) όμως $\mathrm{KM} \perp \mathrm{A\Delta}$ άρα από την (1) είναι $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{\Delta E} = 2\mathrm{KM}$

β) Οι διαγώνιες ΑΕ και ΒΓ του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται (ΑΜ=ΜΕ και ΒΜ=ΜΓ) άρα το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το ύψος ΑΚ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΜ θα είναι και διάμεσος, άρα οι διαγώνιες ΑΔ και ΒΜ του τετραπλεύρου ΑΒΔΜ διχοτομούνται και είναι κάθετες, οπότε το ΑΒΔΜ είναι ρόμβος.

δ) Από το β) έχουμε ότι ΕΓ//ΑΒ και από το γ) ΑΒ//ΜΔ άρα ΕΓ//ΔΜ οπότε ΜΖ//ΕΓ και Μ το μέσο του ΑΕ επομένως το Ζ θα είναι το μέσο του ΑΓ.

4804

ΘΕΜΑ 4

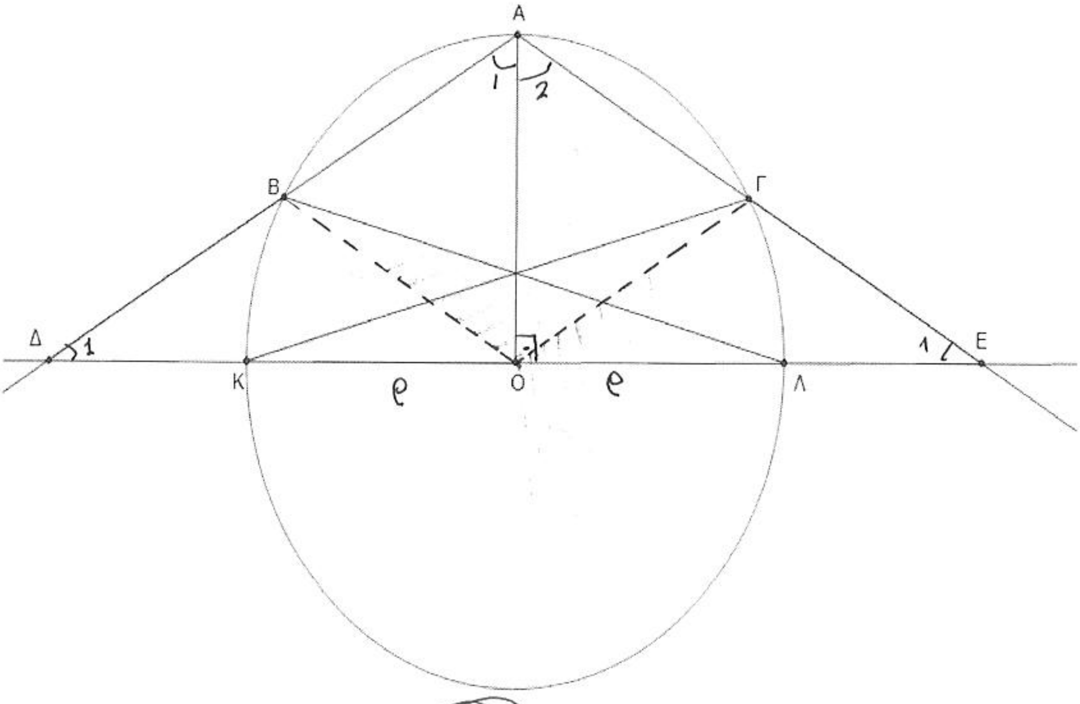
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ=2ρ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $AB = AΓ = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι $120^o$. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $KΓ = ΛB$. (Μονάδες 9)




Λύση

α) Είναι $AB=OB=OA=\rho$ άρα το $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο οπότε $\hat{A}_1=60°$ ομοίως και $\hat{A}_2=60°$ $(OA=OΓ=AΓ)$ επομένως $B\hat{A}Γ=120°$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ είναι $\hat{A}_1=60°$ άρα $\hat{Δ}_1=30°$ οπότε $AΔ=2OA=2AB$ άρα Β το μέσο του ΑΔ ομοίως $\hat{E}_1=30°$ άρα $AE=2OA=2AΓ$ άρα Γ το μέσο του ΑΕ

γ) Έχουμε $\overset{\triangle}{KΓE} = \overset{\triangle}{ΛBΔ}$ αφού $\hat{E}_1=\hat{Δ}_1=30°$, $ΓE=ΔB=\rho$ και $KE=ΔΛ$ (αφού $KE=\rho+OE$, $ΛΔ=\rho+OΔ$ και $OE=OΔ$) επομένως από την ισότητα των τριγώνων ΚΓΕ και ΛΒΔ προκύπτει ότι $KΓ=ΛB$.

13527

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $\mu_\beta, \mu_\gamma$ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές $\beta$ και $\gamma$ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

***Π:*** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι $\mu_\beta, \mu_\gamma$ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π***, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

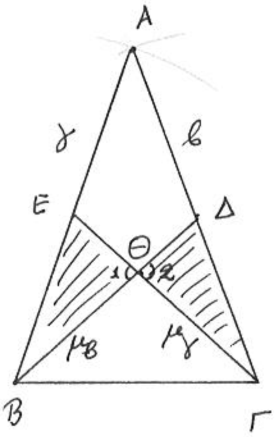
(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της ***Π*** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η ***Π*** και η ***αντίστροφή της*** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

Λύση




α) Έστω $\beta=\gamma$ συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ που έχουν:

- $\beta=\gamma$ (υπόθεση)
- ΑΔ = ΑΕ (μισά ίσων πλευρών)
- $\hat{A}$ κοινή

άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$ οπότε ΒΔ = ΓΕ ή $\mu_\beta = \mu_\gamma$

β) Η αντίστροφη της πρότασης Π είναι:

Π': Αν οι διάμεσοι $\mu_\beta, \mu_\gamma$ τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΘΕΒ και ΘΓΔ έχουν:

- ΘΒ = ΘΓ (αφού $\Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta$ και $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma$)
- ΘΕ = ΘΔ (αφού $\Theta E = \frac{1}{3}\mu_\gamma$, $\Theta\Delta = \frac{1}{3}\mu_\beta$ και $\mu_\beta = \mu_\gamma$)
- $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$ (ως κατακορυφήν)

άρα $\overset{\triangle}{\Theta EB} = \overset{\triangle}{\Theta\Gamma\Delta}$ οπότε ΔΓ = ΒΕ ή $\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ ή $\beta = \gamma$

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν, οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες.