Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου

Απαντήσεις στα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων

(4806, 4808, 4810, 4812, 4814, 4816, 4818, 4821, 4822, 4833, 5886, 5895, 5898, 5900, 5902, 5904, 5908, 5910, 5911, 6875, 6876, 6878, 6879, 7433)

Συγγραφή απαντήσεων: Θανάσης Τσιούμας

Χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος της οθόνης για την πλοήγηση μέσα στο έγγραφο.

ΘΕΜΑ 4

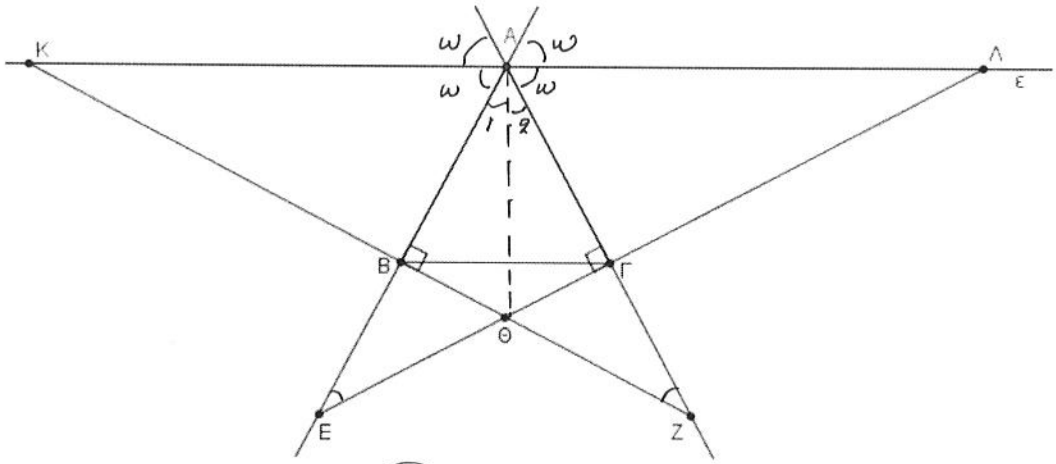
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΖ=ΑΕ (Μονάδες 8)

ii. ΑΚ=ΑΛ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



Λύση

α) i. Είναι $\overset{\triangle}{AZB} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$ αφού $A\hat{B}Z = A\hat{\Gamma}E = 90^\circ$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{A}$: κοινή οπότε $AZ = AE$

ii. Τα τρίγωνα ΑΚΖ και ΑΕΛ έχουν:

- $K\hat{A}Z = E\hat{A}\Lambda$ (αφού $K\hat{A}Z = \hat{A} + \hat{\omega} = E\hat{A}\Lambda$)
- $AZ = AE$ (από i)
- $\hat{Z} = \hat{E}$ (αφού $\overset{\triangle}{AZB} = \overset{\triangle}{AE\Gamma}$)

οπότε $\overset{\triangle}{AKZ} = \overset{\triangle}{AE\Lambda}$ άρα $AK = A\Lambda$

β) Από την ισότητα $\overset{\triangle}{KAZ} = \overset{\triangle}{AE\Lambda}$ προκύπτει ότι $KA = A\Lambda$ δηλαδή ΘΑ διάμεσος του ισοσκελούς ($\hat{K} = \hat{\Lambda}$) τριγώνου ΘΚΛ άρα θα είναι και ύψος οπότε $\hat{\omega} + \hat{A}_1 = \hat{\omega} + \hat{A}_2 = 90^\circ$ άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ δηλαδή η ΑΘ διχοτομεί τη γωνία Α.

ΘΕΜΑ 4

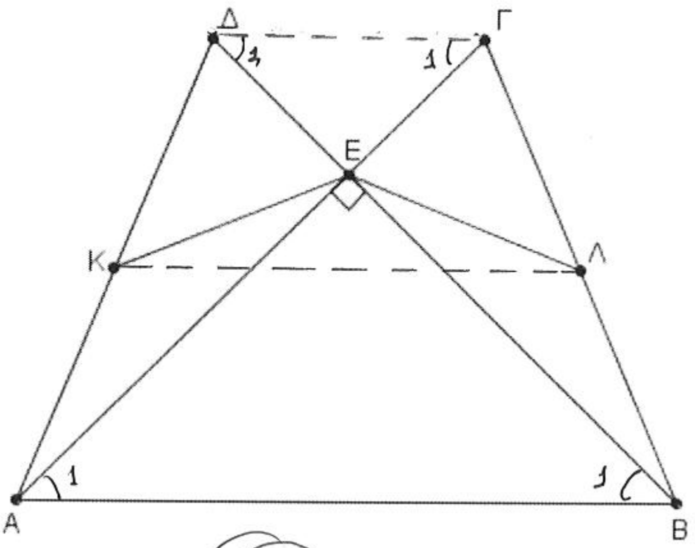
Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ . (Μονάδες 7)

β) ΔΓ//ΑΒ . (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{AB\Delta}$ έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ οπότε το τρίγωνο ΕΑΒ θα είναι ορθογώνιο ισοσκελές άρα ΕΒ = ΕΑ όμως ΔΒ = ΑΒ = ΑΓ επομένως ΒΔ − ΕΒ = ΑΓ − ΑΕ ή ΕΔ = ΕΓ

β) Επειδή ΕΔ = ΕΓ το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = 45°$ επίσης $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45°$ άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και είναι εντός εναλλάξ άρα ΑΒ//ΔΓ

γ) Αφού ΔΓ//ΑΒ το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και επειδή οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες θα είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε ΑΔ = ΒΓ (1)

Είναι $EK = \frac{A\Delta}{2}$ και $E\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$ ως διάμεσοι των ορθογωνίων τριγώνων ΕΔΑ και ΕΓΒ οπότε από την (1) έχουμε ΕΚ = ΕΛ δηλαδή το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές.

Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ άρα ΚΛ//ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

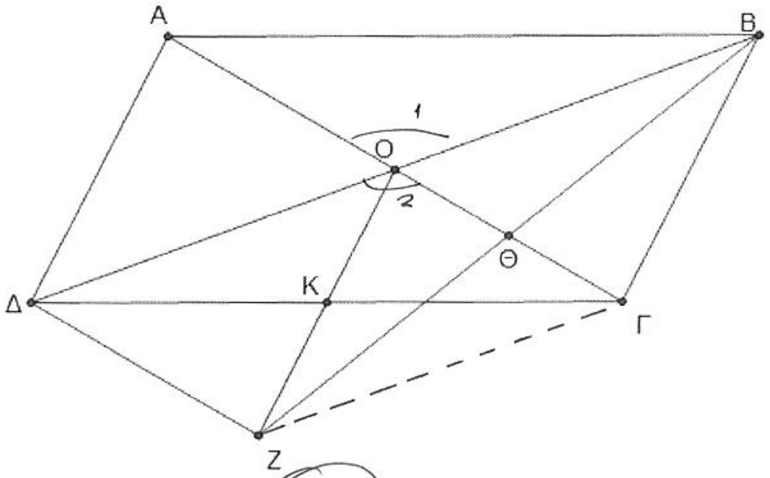
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $\mathrm{KZ} = \mathrm{KO}$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{AO} = \Delta\mathrm{Z}$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AOB}}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{Z}\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



Λύση

α) Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΟΓΖΔ διχοτομούνται (ΟΚ=ΚΖ, ΔΚ=ΚΓ) άρα το ΟΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΖΓ =// ΟΔ και αφού ΟΒ=ΟΔ έχουμε ΖΓ =// ΟΒ άρα το ΟΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιες ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.

β) Επειδή το ΟΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ΔΖ=ΟΓ και αφού ΟΓ=ΟΑ είναι ΔΖ=ΟΑ

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ίσα (ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ κατακορυφήν) επίσης $\overset{\Delta}{\Delta O\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$ (ΔΓ: κοινή, ΔΟ=ΖΓ και ΟΓ=ΔΖ) επομένως $\overset{\Delta}{AOB} = \overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$

ΘΕΜΑ 4

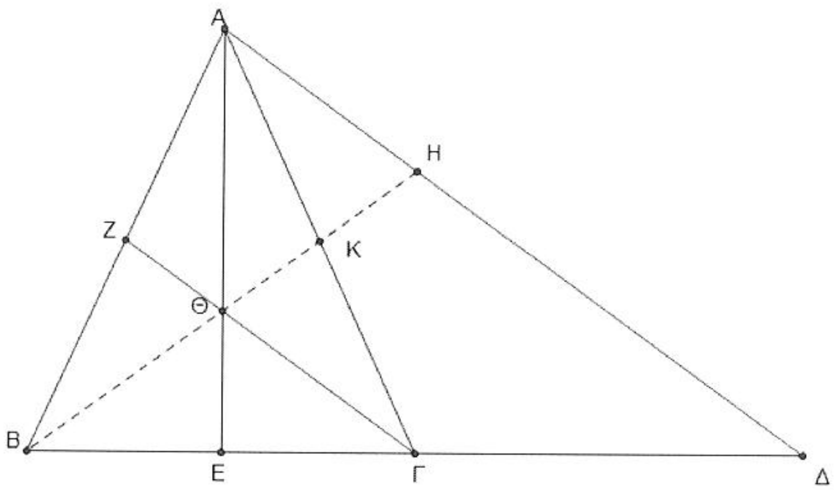
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) ΑΗ=2ΖΘ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ άρα η ΒΚ είναι διάμεσός του οπότε Κ το μέσο του ΑΓ επίσης Ζ το μέσο του ΑΒ άρα $ZK =\!\!/\!\!/ \frac{\Gamma B}{2}$ ή $ZK =\!\!/\!\!/ \Gamma E$ οπότε το τετράπλευρο ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο

β) Αφού Γ το μέσο του ΒΔ και Ζ το μέσο του ΑΒ άρα $\Gamma Z // A\Delta$ οπότε και $Z\Theta // AH$. Είναι Ζ το μέσο του ΑΒ και $\Theta Z // AH$ άρα Θ το μέσο του ΒΗ οπότε $\Theta Z = \frac{AH}{2}$ ή $AH = 2\Theta Z$ (1). Όμως $\Theta\Gamma = 2\Theta Z$ (2) (Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ) οπότε από (1),(2) έχουμε $AH = \Theta\Gamma$

γ) Αποδείχτηκε στο β)

ΘΕΜΑ 4

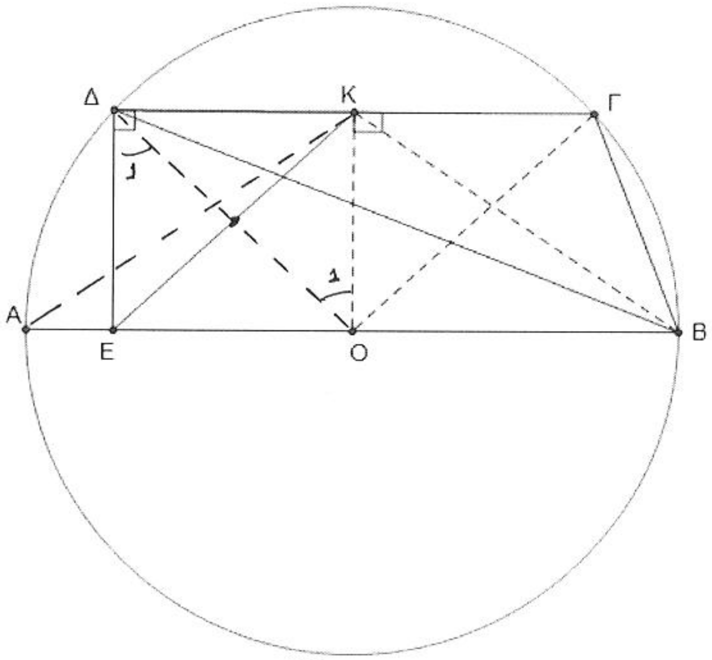
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Το τετράπλευρο ΚΔΕΟ είναι ορθογώνιο αφού $\hat{\Delta} = \hat{K} = \hat{E} = 90°$ οπότε $\Delta K =// OE$ όμως $K\Gamma = K\Delta$ άρα $K\Gamma =// OE$ οπότε το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η ΟΚ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{O}\Gamma$ αφού ΟΚ ύψος και διάμεσος άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές οπότε $\Delta\hat{O}\Gamma = 2\hat{O}_1$ όμως $\hat{O}_1 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ) και $\Delta\hat{E}K = \hat{\Delta}_1$ (ΕΔΚΟ ορθογώνιο) επομένως $\Delta\hat{E}K = \hat{O}_1 = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$

γ) ΟΚ ύψος και διάμεσος του $K\overset{\triangle}{A}B$ άρα είναι ισοσκελές οπότε $KB = KA$ (1) είναι $OE < OA$ άρα $KE < KA$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι $KE < KB$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

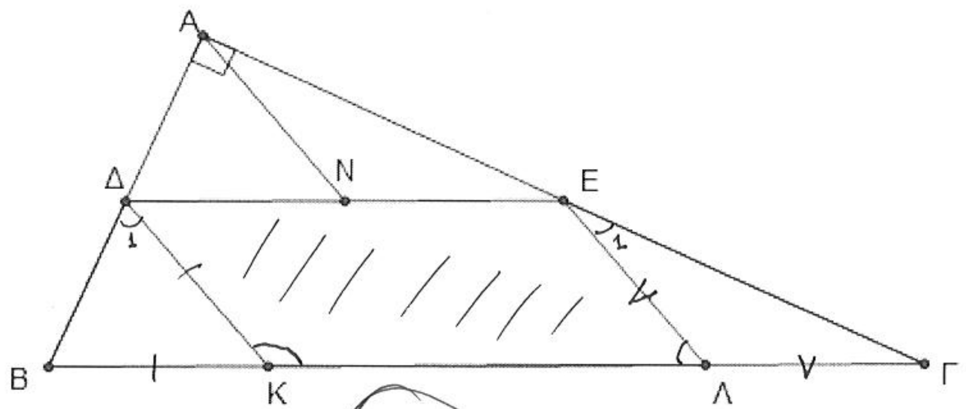
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\overset{\wedge}{\Lambda}K = 2\overset{\wedge}{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $K\overset{\triangle}{\Delta}B$ ισοσκελές ($K\Delta = KB$) άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ όμως $\Delta\hat{K}\Lambda = \hat{B} + \hat{\Delta}_1$ (ως εξωτερική του $\Delta\overset{\triangle}{B}K$) οπότε $\Delta\hat{K}\Lambda = \hat{B} + \hat{B} = 2\hat{B}$
Ομοίως $\Lambda\overset{\triangle}{E}\Gamma$ ισοσκελές άρα $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ οπότε $E\hat{\Lambda}K = \hat{E}_1 + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$

β) Τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα οπότε $\Delta E \overset{=}{\parallel} \frac{B\Gamma}{2}$ (1) όμως από α) είναι $\Delta\hat{K}\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B}+\hat{\Gamma}) = 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$ και αφού $\Delta\hat{K}\Lambda$, $E\hat{\Lambda}K$ εντός και επί τα αυτά οπότε $\Delta K \parallel E\Lambda$ (2)
Από (1),(2) προκύπτει ότι το ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $\Delta K = E\Lambda$ (3).
Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = K\Lambda$ οπότε $BK + \Lambda\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = K\Lambda = E\Delta$ οπότε
$\Delta E = BK + \Lambda\Gamma = \Delta K + E\Lambda = \Delta K + \Delta K = 2\Delta K$ (από την (3))

γ) Η ΑΝ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ ($\hat{A} = 90^\circ$) οπότε $AN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{2\Delta K}{2} = \Delta K$
και $AN = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

ΘΕΜΑ 4

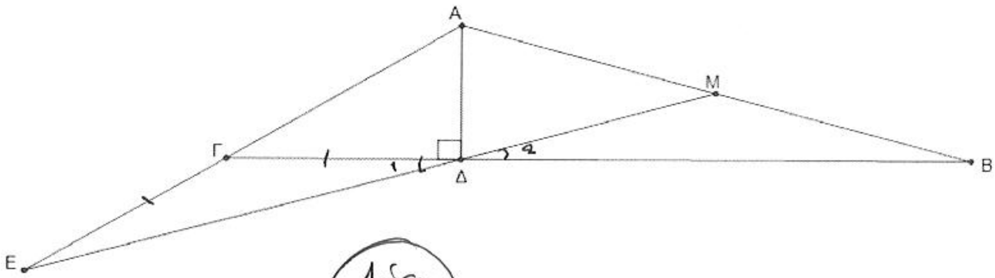
Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ($AB > A\Gamma$), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) ΓΕ<ΑΓ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $\hat{E} = \hat{\Delta}_1$ ($\Gamma E = \Gamma\Delta$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν
άρα $\hat{E} = \hat{\Delta}_2$ (1)
Επειδή η ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΕ
άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{B}$ (2) διότι $\overset{\Delta}{\Delta MB}$ ισοσκελές
Από (1),(2) έχουμε $\hat{B} = \hat{E}$

β) Έχουμε $\hat{\Gamma} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1$ (ως εξωτερική του $\overset{\Delta}{\Gamma E\Delta}$) ή $\hat{\Gamma} = 2\hat{E} = 2\hat{B}$
αφού $\hat{\Delta}_1 = \hat{E} = \hat{B}$
Επίσης $A\hat{M}\Delta = \hat{B} + \hat{\Delta}_2$ (ως εξωτερική του $\overset{\Delta}{\Delta MB}$) άρα $A\hat{M}\Delta = 2\hat{B}$ αφού
$\hat{\Delta}_2 = \hat{B}$

γ) Είναι $\Gamma E = \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta < \Gamma A$ (αφού ΓΑ υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ) άρα $\Gamma E < \Gamma A$

4821

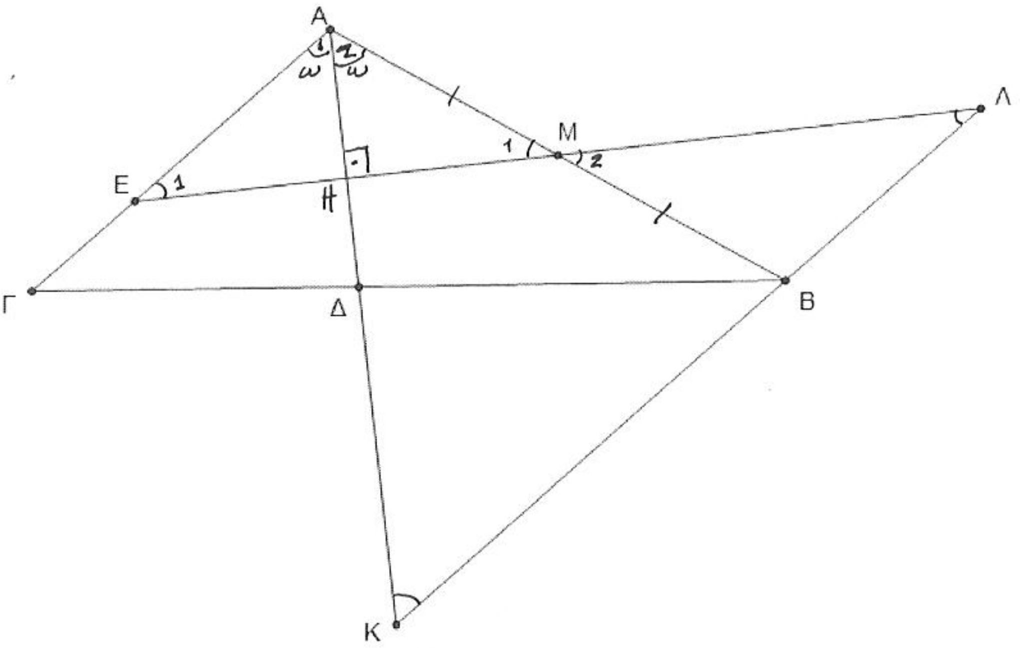
ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Λύση

α) • Είναι ΑΗ διχοτόμος και ύψος του $\overset{\triangle}{AEM}$ άρα το τρίγωνο ΑΕΜ είναι ισοσκελές

• Αφού $\overset{\triangle}{AEM}$ ισοσκελές η $\hat{E}_1 = \hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{\Lambda} = \hat{E}_1$ (ως εντός εναλλάξ) άρα $\hat{\Lambda} = \hat{M}_2$ οπότε το $\overset{\triangle}{MB\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

• έχουμε $\hat{K} = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$ (ως εντός εναλλάξ) οπότε $\hat{K} = \hat{A}_2$ άρα το $\overset{\triangle}{ABK}$ είναι ισοσκελές

β) Είναι $\overset{\triangle}{AME} = \overset{\triangle}{MB\Lambda}$ (ΑΜ=ΜΒ, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ και $M\hat{A}E = M\hat{B}\Lambda$ ως εντός εναλλάξ άρα ΒΛ $=\!\!\parallel$ ΑΕ οπότε το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο

ΘΕΜΑ 4

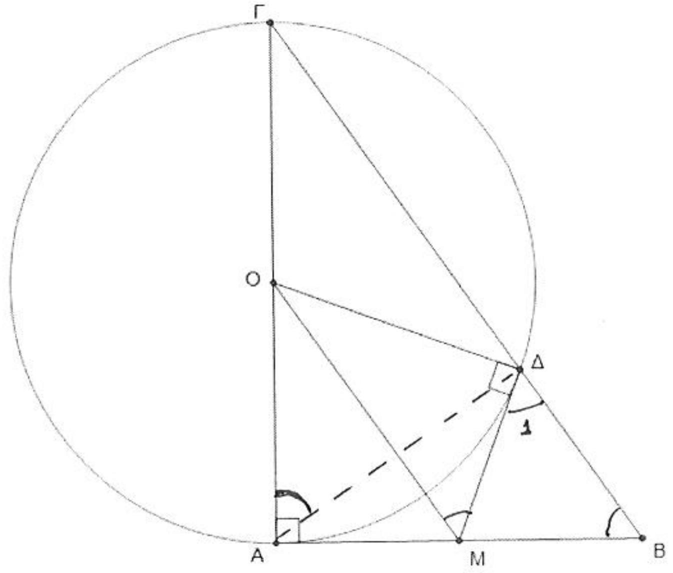
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^o$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Απο το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $\Delta\hat{M}B$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)



1λύση

α) Είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) άρα $A\Delta \perp B\Gamma$ και $A\Gamma \perp AB$ οπότε $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (οξείες με κάθετες πλευρές)

β) Το τετράπλευρο ΟΑΜΔ είναι εγγράψιμο ($\hat{A} + \hat{\Delta} = 90^o + 90^o = 180^o$) άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = O\hat{M}\Delta = \hat{\Delta}_1$ (ως εντός εναλλάξ) αφού $OM \perp A\Delta$ και $\Gamma B \perp A\Delta$ άρα $OM // \Gamma B$ επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ αφού $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ άρα $\Delta\overset{\triangle}{M}B$: ισοσκελές

γ) Αφού $M\Delta = MB$ ($M\overset{\triangle}{\Delta}B$: ισοσκελές) και $MA = M\Delta$ ως εφαπτόμενα τμήματα, επομένως $MA = MB$ άρα Μ το μέσο του ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{A}\overset{\wedge}{\mathrm{B}}\mathrm{K}=\mathrm{A}\overset{\wedge}{\Gamma}\mathrm{K}$. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZKE}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής στο (αi.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{BK\Gamma}}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$ *έχουν*

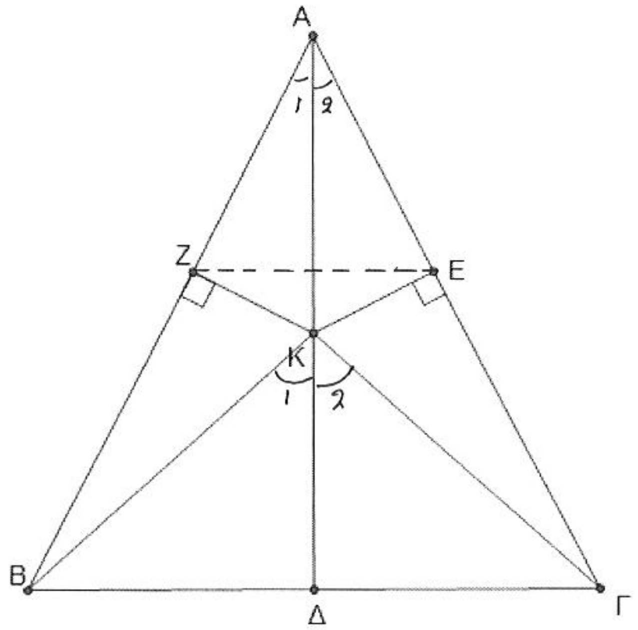
1. $\mathrm{BK}=\mathrm{K\Gamma}$

2. $\mathrm{B}\overset{\wedge}{\mathrm{A}}\mathrm{K}=\Gamma\overset{\wedge}{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\overset{\wedge}{\mathrm{A}}$

3. $\mathrm{A}\overset{\wedge}{\mathrm{B}}\mathrm{K}=\mathrm{A}\overset{\wedge}{\Gamma}\mathrm{K}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 6)



Λύση
Ζ

α) i. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABK}$, $\overset{\triangle}{A\Gamma K}$ έχουν

- AK κοινή πλευρά
- $AB = A\Gamma$ (υπόθεση)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού η διάμεσος $A\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διχοτόμος

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Το K ανήκει στη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας A, άρα ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ δηλαδή $KZ = KE$ οπότε $\overset{\triangle}{ZKE}$ ισοσκελές

iii. Είναι $ZE \perp A\Delta$ και $B\Gamma \perp A\Delta$ άρα $ZE // B\Gamma$ οπότε το $ZE\Gamma B$ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

β) Για να ικανοποιείται το κριτήριο Γ-Π-Γ το βήμα 2 να αντικατασταθεί με : $B\hat{K}A = \Gamma\hat{K}A$ ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{K}_1$ και $\hat{K}_2$ ($K\Delta$ διχοτόμος του ισοσκελούς $\overset{\triangle}{KB\Gamma}$)

ΘΕΜΑ 4

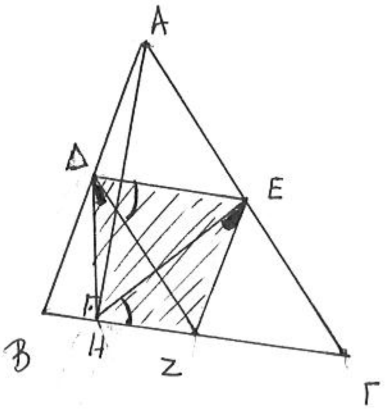
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

Λύση



α) Επειδή τα Δ,Ε είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα άρα ΔΕ//ΒΓ οπότε το ΔΕΖΗ είναι τραπέζιο (αφού και ΗΖ//ΔΕ)

Επίσης Ε,Ζ τα μέσα των ΑΓ,ΒΓ αντίστοιχα, άρα

$ΕΖ =\parallel \frac{ΑΒ}{2}$ δηλαδή ΕΖ = ΒΔ όμως και ΗΔ ($ΗΔ \nparallel ΕΖ$) θα είναι ίση με $\frac{ΑΒ}{2} = ΒΔ$ (αφού ΗΔ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΗΑΒ)

Επομένως ΕΖ = ΗΔ ($ΕΖ \nparallel ΗΔ$) άρα το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Αφού το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο οπότε $Η\hat{Δ}Ζ = Η\hat{Ε}Ζ$ (αφού βλέπουν την ίδια πλευρά ΗΖ)

γ) Ομοίως $Ε\hat{Δ}Ζ = Ε\hat{Η}Ζ$ (βλέπουν την πλευρά ΕΖ) αφού ΔΕΖΗ εγγράψιμο σε κύκλο.

5895

ΘΕΜΑ 4

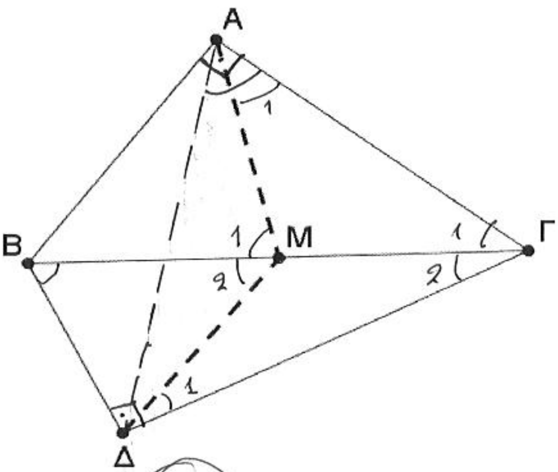
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ άρα
$AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1)
Ομοίως η ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ
άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ (2)
Από (1),(2) έχουμε ΑΜ = ΜΔ άρα το $\overset{\triangle}{AM\Delta}$ είναι ισοσκελές

β) Είναι $\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}_1$ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΜΓ)
όμως $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ΑΜ = ΜΓ) άρα $\hat{M}_1 = 2\hat{\Gamma}_1$ (3)
Επίσης $\hat{M}_2 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_2$ (ως εξωτερική γωνία του $M\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (ΜΔ = ΜΓ)
οπότε $\hat{M}_2 = 2\hat{\Delta}_1$ (4)
Από (3),(4) έχουμε $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2\hat{\Gamma}_1 + 2\hat{\Gamma}_2 = 2(\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2)$ ή $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$

γ) Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 90^o + 90^o = 180^o$ οπότε το ΑΒΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο οπότε $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (αφού βλέπουν τη ίδια πλευρά ΔΓ)

ΘΕΜΑ 4

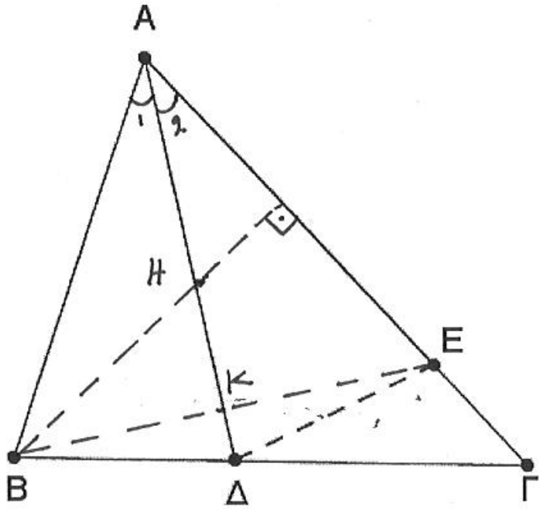
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν :
- ΑΔ κοινή
- ΑΒ = ΑΕ (υπόθεση)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος)

άρα $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Delta E}$

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΕ άρα θα είναι ύψος και διάμεσος δηλαδή η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ

γ) Είναι ΑΚ ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και ΒΗ επίσης ύψος του άρα το Η θα είναι το ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{ABE}$ οπότε η ΕΗ θα είναι το τρίτο ύψος δηλαδή η ευθεία ΕΗ ⊥ ΑΒ

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΓΔ $\perp$ ΒΓ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

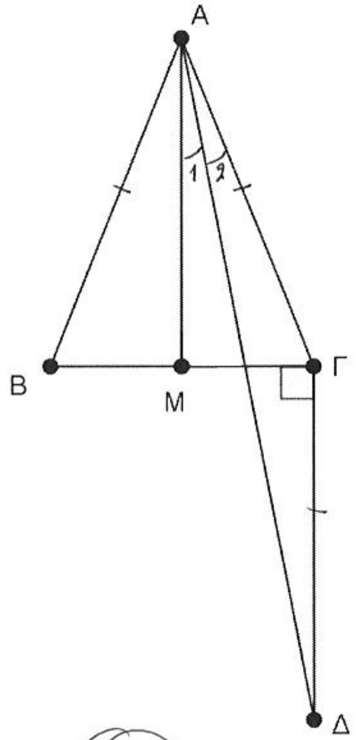
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ άρα ΑΜ ύψος και διχοτόμος της $\hat{A}$ οπότε έχουμε ΑΜ // ΓΔ (ως κάθετες στην ΒΓ)

β) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$ (ως εντός εναλλάξ αφού ΑΜ//ΓΔ) και $\hat{\Delta} = \hat{A}_2$ αφού ΑΓΔ ισοσκελές (ΑΓ = ΓΔ) άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$

γ) Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{M\hat{A}\Gamma}{2} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}$ (αφού $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\hat{M}\Gamma = 90^\circ$)

δ) Στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ΑΔ < ΑΓ + ΓΔ (1) όμως ΑΓ = ΓΔ = ΑΒ (2) από (1), (2) είναι ΑΔ < ΑΒ + ΑΒ ή ΑΔ < 2ΑΒ

ΘΕΜΑ 4

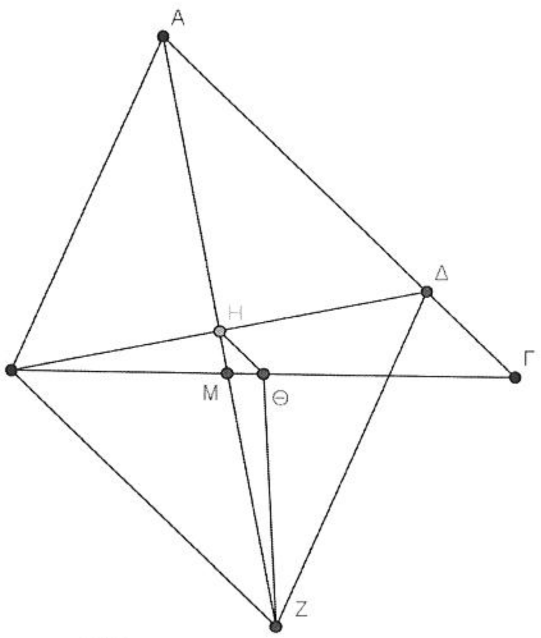
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ είναι ίση με $\frac{AB + A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 7)



Λύση 1

α) Επειδή ΑΗ διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ΑΒΔ αυτό θα είναι ισοσκελές και η ΑΗ θα είναι και διάμεσος, άρα ΒΗ = ΗΔ και ΑΗ = ΗΖ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα θα είναι ρόμβος (ή αφού ΑΒ = ΑΔ)

β) Το Η είναι το μέσο της ΒΔ και Θ το μέσο της ΒΓ άρα ΗΘ//ΔΓ όμως ΔΓ//ΒΖ άρα ΗΘ//ΒΖ που σημαίνει ότι το ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ ισούται με $\frac{H\Theta + BZ}{2}$

όμως $H\Theta = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ και $BZ = AB$ (αφού ΑΒΖΔ ρόμβος)

οπότε η διάμεσος είναι $\frac{H\Theta + BZ}{2} = \frac{\frac{A\Gamma - AB}{2} + AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB + 2AB}{4} = \frac{A\Gamma + AB}{4}$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

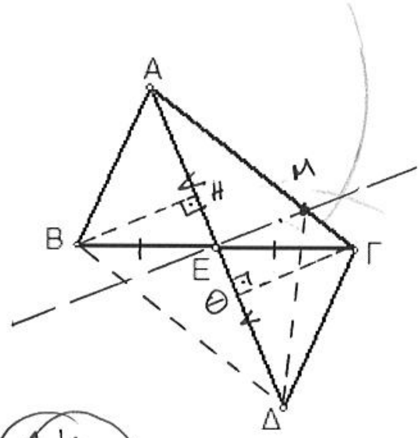
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



Λύση

α) i. οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ διχοτομούνται (ΑΕ=ΕΔ και ΒΕ=ΕΓ) άρα το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΒ=ΔΓ

ii. επειδή ΑΒ//ΔΓ οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ αν προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Έστω ΒΗ και ΓΘ οι αποστάσεις των χωριών Β,Γ από το δρόμο ΑΔ θα είναι ΒΗ=ΓΘ διότι $\overset{\triangle}{ΒΗΕ} = \overset{\triangle}{ΕΘΓ}$ (ορθογώνια, ΒΕ=ΕΓ και $Β\hat{Ε}Η = Γ\hat{Ε}Θ$ ως κατακορυφήν)

β) Επειδή θέλουμε να προσδιορίσουμε το σημείο της ΑΓ που να ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ φέρουμε τη μεσοκάθετη του ΑΔ, η τομή της μεσοκάθετης με την ΑΓ θα είναι το ζητούμενο σημείο Μ, αφού θα είναι ΜΑ=ΜΔ.

5908

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

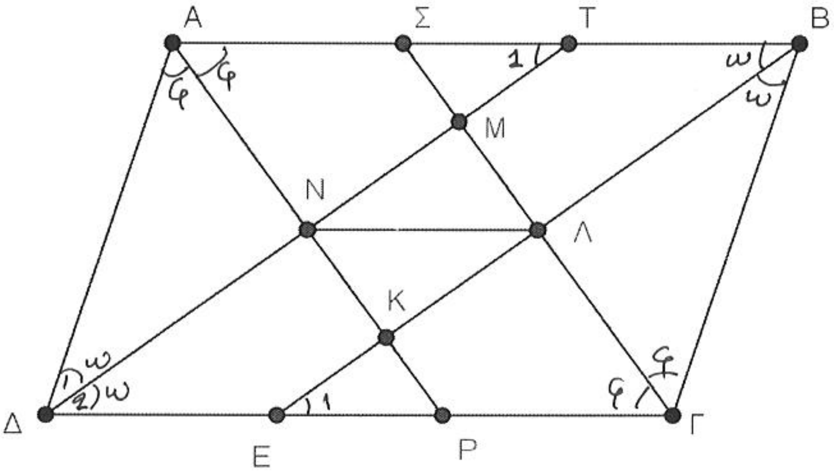
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΛΝ // ΑΒ (Μονάδες 5)

δ) ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ (Μονάδες 5)



Λύση

α) Είναι $BT = AB - AT$ (1) όμως $AB = \Delta\Gamma$ (2) και $AT = A\Delta$ (3)
(αφού $\hat{T}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ) οπότε από (1), (2), (3)
έχουμε $BT = \Delta\Gamma - A\Delta$ (4)
Είναι $\Delta E = \Delta\Gamma - E\Gamma$ (5) και $E\Gamma = B\Gamma = A\Delta$ (αφού $\hat{E}_1 = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ)
Από (4), (5) είναι $\Delta E = TB$ και $\Delta E // TB$ άρα το ΔΕΒΤ
είναι παραλληλόγραμμο

β) Επειδή $\hat{A} + \hat{B} = 180°$ (εντός και επί τα αυτά) έχουμε
$2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega} = 180°$ άρα $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90°$ οπότε στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{KAB}$ είναι
$\hat{K} = 90°$. Ομοίως $\hat{\Lambda} = 90°$ στο ΛΒΓ και $\hat{M} = 90°$ στο $\overset{\triangle}{\Delta M\Gamma}$
Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο

γ) Είναι Ν, Λ τα μέσα των ΔΤ και ΕΒ αντίστοιχα άρα
$NT \overset{//}{=} \Lambda B$ (αφού ΔΕΒΤ παραλληλόγραμμο) Επομένως το
ΤΒΛΝ είναι παραλληλόγραμμο άρα $N\Lambda \overset{//}{=} BT$ ή $N\Lambda // BT$

δ) Αφού $N\Lambda = BT$ έχουμε $N\Lambda = AB - AT = AB - A\Delta$ ($AT = A\Delta$)

14

5910

ΘΕΜΑ 4

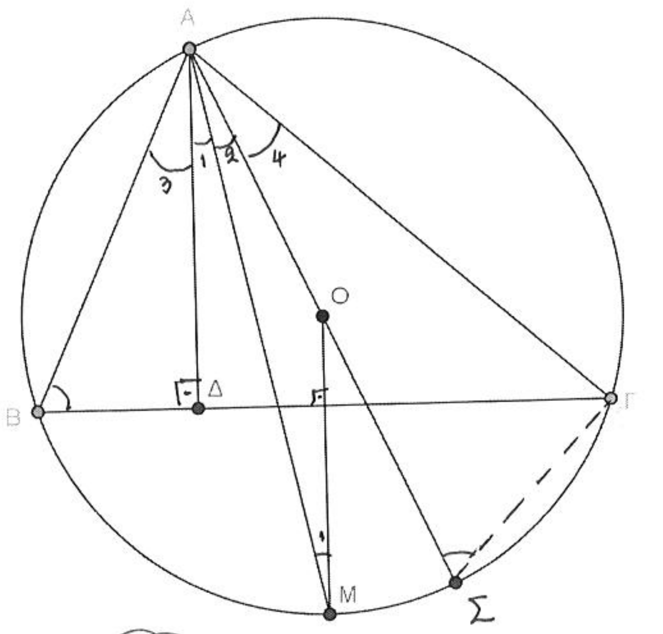
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



Λύση

α) Αφού Μ το μέσο του $\overset{\frown}{B\Gamma}$ άρα $OM \perp B\Gamma$ επίσης $A\Delta \perp B\Gamma$ οπότε $A\Delta // OM$ επομένως $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (ως εντός εναλλάξ) όμως $\hat{M}_1 = \hat{A}_2$ ($OM = OA = \rho$) άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ που σημαίνει ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{A}O$

β) Έχουμε $A\hat{\Gamma}\Sigma = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) επίσης $\hat{B} = \hat{\Sigma}$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο) άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΣΓ θα έχουν και τις γωνίες $\hat{A}_3$ και A_4 ίσες δηλαδή $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$

2ος τρόπος Είναι $B\hat{A}M = M\hat{A}\Gamma$ (αφού $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{M\Gamma}$) $\Leftrightarrow \hat{A}_3 + \hat{A}_1 = \hat{A}_2 + \hat{A}_4$ όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (από α) άρα και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$

γ) Είναι $\Delta\hat{A}O + \hat{A}_4 + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ όμως $90^\circ = \hat{B} + \hat{A}_3$ άρα $\Delta\hat{A}O + \hat{A}_4 + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{A}_3$

$\Leftrightarrow \Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ αφού $\hat{A}_4 = \hat{A}_3$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

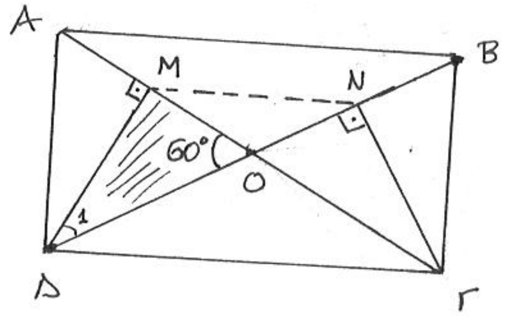
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)

ii. $ΑΜ=\frac{1}{4}ΑΓ$ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

Λύση



α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΔ ($\hat{M}=90°$) είναι $\hat{Δ}_1=90°-60°=30°$
οπότε $ΟΜ=\frac{ΟΔ}{2}=\frac{ΟΑ}{2}$ (αφού οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες)
Επομένως Μ το μέσο του ΑΟ

ii. Από το i. είναι $ΑΜ=ΜΟ=\frac{1}{2}ΟΑ$ και $ΟΑ=\frac{ΑΓ}{2}$ άρα $ΑΜ=\frac{1}{4}ΑΓ$

β) Ομοίως (όπως στο α ii) $ΓΝ=\frac{1}{4}ΑΓ$ και Ν το μέσο του ΟΒ άρα ΜΝ//ΑΒ (αφού Μ το μέσο του ΟΑ) άρα το ΜΝΓΔ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού $ΜΔ=ΓΝ=\frac{1}{4}ΑΓ$.

ΘΕΜΑ 4

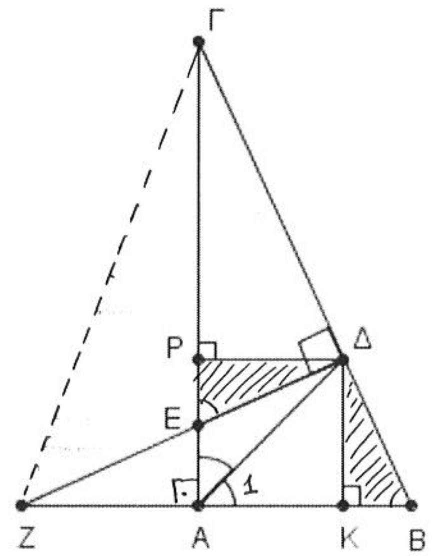
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



Λύση

α) i. Είναι $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως οξείες με κάθετες πλευρές (ΒΑ⊥ΑΓ και ΒΓ⊥ΕΔ)

ii. Έχουμε $\hat{A} = \hat{K} = \hat{P} = 90°$ άρα το ΑΚΔΡ είναι ορθογώνιο και αφού ΑΔ διχοτόμος της $\hat{A}$ οπότε το ΑΚΔΡ είναι τετράγωνο οπότε ΔΚ = ΔΡ (1)

Τα τρίγωνα ΡΚΔ και ΔΕΡ είναι ίσα ($\hat{K} = \hat{P} = 90°$, ΔΚ = ΔΡ από (1) και $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ από α i)

Επομένως ΔΕ = ΔΒ.

β) Επειδή $\Gamma\hat{A}Z = Z\hat{\Delta}\Gamma = 90°$ άρα το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (αφού $\Gamma\hat{A}Z$, $Z\hat{\Delta}\Gamma$ βλέπουν την ίδια πλευρά ΓΖ)

Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}Z = \hat{A}_1 = 45°$.

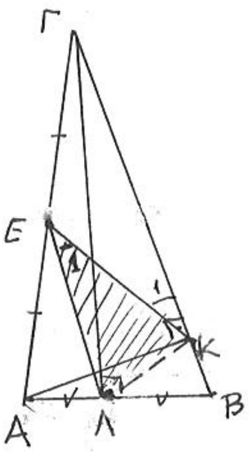
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

Λύση



α) Η ΚΕ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΚΑΓ ($\hat{K}=90^\circ$)

άρα $KE=\frac{A\Gamma}{2}$ (1)

Επίσης η ΕΛ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΛΓ

οπότε $\Lambda E=\frac{A\Gamma}{2}$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ΕΚ=ΕΛ οπότε το $K\overset{\triangle}{E}\Lambda$ είναι ισοσκελές

β) Επειδή $E\overset{\triangle}{K}\Lambda$ ισοσκελές $E\hat{K}\Lambda=E\hat{\Lambda}K=\frac{180^\circ-\hat{E}_1}{2}=90^\circ-\frac{\hat{E}_1}{2}$ (3)

Όμως ΛΚ=ΛΒ άρα $\Lambda\hat{K}B=\hat{B}$ (4)

Είναι $\hat{E}_1=\hat{K}_1=\hat{\Gamma}$ (αφού Ε, Λ τα μέσα των ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα

Οπότε από την (3) προκύπτει $E\hat{K}\Lambda=90^\circ-\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}-\frac{\Gamma}{2}=\frac{A+B}{2}=\frac{2B}{2}=$

$=\hat{B}$ (αφού $\hat{A}=\hat{B}$) (5)

Από (4), (5) είναι ΛΚ διχοτόμος της $B\hat{K}E$.

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^0$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

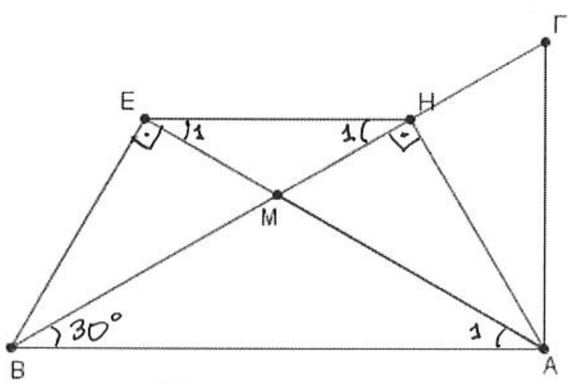
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

β) ΑΗ=ΒΕ, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) ΕΗ//ΑΒ. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Η διάμεσος $AM = BM$ (αφού $\hat{A} = 90^\circ$) οπότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές άρα $\hat{A}_1 = \hat{B} = 30^\circ$ οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΑ ($\hat{E} = 90^\circ$) είναι $BE = \frac{AB}{2}$

β) Είναι $\overset{\triangle}{AHB} = \overset{\triangle}{BEA}$ ($B\hat{E}A = A\hat{H}B = 90^\circ$, ΑΒ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{B} = 30^\circ$) οπότε $AH = BE$

γ) Επειδή $B\hat{E}A = A\hat{H}B = 90^\circ$ και βλέπουν την πλευρά ΑΒ άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

δ) Είναι $\overset{\triangle}{MEB} = \overset{\triangle}{MHA}$ (ορθογώνια, $MB = MA$ και $EB = HA$) οπότε $ME = MH$ άρα $\hat{E}_1 = \hat{H}_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ διότι $E\hat{M}H = B\hat{M}A = 120^\circ$

Επομένως $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ$ και είναι εντός εναλλάξ άρα $EH // AB$

ΘΕΜΑ 4

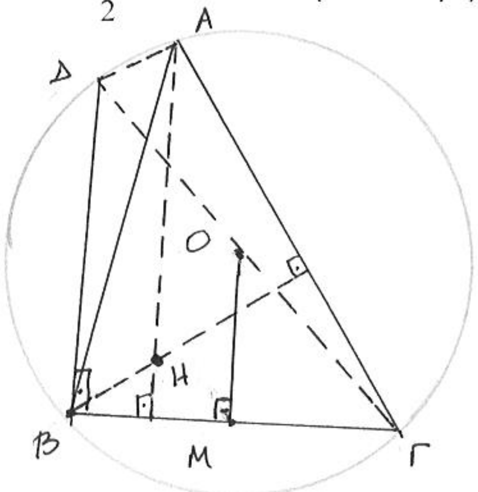
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ⊥ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ⊥ΑΓ. (Μονάδες 8)

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΟΜ= $\frac{AH}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση



α) Επειδή $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ και είναι εγγεγραμμένη άρα η ΔΓ είναι διάμετρος του κύκλου οπότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, άρα ΑΔ⊥ΑΓ

β) Είναι ΑΗ⊥ΒΓ (αφού Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ) και ΔΒ⊥ΒΓ άρα ΔΒ//ΑΗ (1)
Επίσης ΒΗ⊥ΑΓ (Η ορθόκεντρο) και ΑΔ⊥ΑΓ (από α)) άρα ΑΔ//ΒΗ (2)
Από (1),(2) προκύπτει ότι ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Έχουμε Ο μέσο ΔΓ και Μ το μέσο του ΒΓ άρα $OM = \frac{\Delta B}{2}$
όμως ΔΒ = ΑΗ (ΑΔΒΗ παραλληλόγραμμο) επομένως $OM = \frac{AH}{2}$

ΘΕΜΑ 4

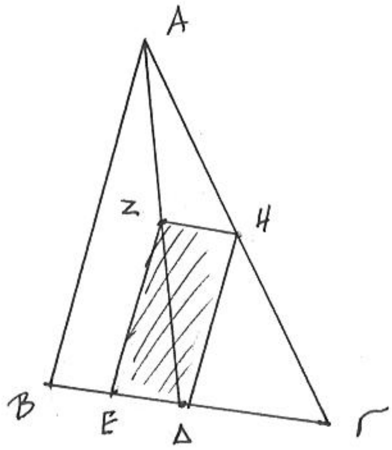
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)

Λύση



α) Είναι $ZH \overset{//}{=} \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (1) (αφού Z, H τα μέσα των AΔ, AΓ αντίστοιχα)
Επίσης $E\Delta = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2)
Από (1),(2) είναι $ZH \overset{//}{=} E\Delta$ άρα το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο

β) Για να είναι το ΔEZH ρόμβος θα πρέπει $ZH = ZE$
όμως $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ και $ZE = \frac{AB}{2}$ άρα πρέπει $\frac{B\Gamma}{4} = \frac{AB}{2}$
δηλαδή $B\Gamma = 2AB$

γ) Επειδή $ZE \parallel AB$ άρα $\hat{E} = \hat{B} = 90^\circ$ άρα το παραλληλόγραμμο ΔEZH σ' αυτή την περίπτωση ($\hat{B} = 90^\circ$) είναι ορθογώνιο