

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - x}{x^2 + 3}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{x+1}{3}$ πάνω στο άξονα $y'y$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = -\frac{x}{x^2 + 3}$.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f και h στα σημεία που τέμνουν τον άξονα $y'y$ είναι παράλληλες και στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις τους.

δ) Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = (x^2 + 3)f(x)$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{\varphi(x)} - \varphi(-1)}{x + 3}$.