

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta}{x^2 + x + 1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 135° .

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.
- γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο που παρουσιάζει μέγιστο η f και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με την τετμημένη του ελάχιστου της f .
- δ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x^3 - 1)f(x)$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^4 - 1}$.