

Μαθηματικά ΕΠΑΛ Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

2016 – 2024

Περιεχόμενα

2016 (Νέο Σύστημα)	5
2016 Επαναληπτικές (Νέο Σύστημα)	7
2017	9
2017 Επαναληπτικές	11
2018	13
2018 Επαναληπτικές	15
2019	17
2019 Επαναληπτικές	19
2020	21
2020 Επαναληπτικές	23
2021	25
2021 Επαναληπτικές	27
2022	29
2022 Επαναληπτικές	31
2023	33
2023 Επαναληπτικές	35
2024	37
2024 Επαναληπτικές	39

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- A2.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** $(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$.
- β.** $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
- γ.** Σε μία κανονική κατανομή ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.
- δ.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1, ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
- ε.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός Υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
Σύνολο				

- B1.** Αν γνωρίζετε ότι η 5η συχνότητα (v_5) ισούται με την 1η συχνότητα (v_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.
- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.
- B3.** Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.
- B4.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
- Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.
- Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
- Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^2 + \alpha x - 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$.
- Δ2. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την $f'(x)$.
- Δ3. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.
- Δ4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_2, y_2), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $x \in A$.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.
- β.** Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- γ.** Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- δ.** Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.
- ε.** $(x^v)' = (v-1) \cdot x^v$, όπου v φυσικός αριθμός.

ΘΕΜΑ Β

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

- B1.** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι: **7, 9, 11, 13, 15, 17, 19**.
- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω παρατηρήσεων.
- B3.** Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s των παραπάνω αριθμών.
- B4.** Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$.

- Γ1.** Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.
- Γ2.** Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$.
- Γ3.** Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.
- Γ4.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^4 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β αν $f(0) = 2019$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$.
- Δ2.** Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- γ.** Το εύρος (R) είναι μέτρο διασποράς.
- A3.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:
- α.** $(x^p)' = \dots$, όπου p ρητός αριθμός.
- β.** $(\sin x)' = \dots$.
- γ.** Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο: $\bar{x} = \dots$.

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa + 1, 4, 6, \kappa + 2, 6, 4$$

όπου: $\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.
- B2.** Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $(\bar{x})$ των βαθμών του φοιτητή.
- B3.** Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .
- B4.** Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV.
- Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \approx 1,18$.

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.

Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

- Γ1.** Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.
- Γ2.** Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_v - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής.
- A3.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v$, όπου v φυσικός αριθμός.
- β.** Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- γ.** Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- δ.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- ε.** Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι: 7, 8, 10, 5, 11, 7.

- B1.** Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:
- α.** τη μέση τιμή $\bar{x}$,
- β.** τη διάμεσο δ ,
- γ.** τη διακύμανση s^2 .
- B2.** Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.
- B3.** Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - \kappa x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.
- Γ2.** Για $\kappa = 3$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.
- Γ3.** Για $\kappa = 3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{3}{4}$.

- Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$.
- Δ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
- Δ4.** Αν οι τιμές $f(-1), f(1), f(0,25), f(-0,5), f(0)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X , τότε να τις διατάξετε κατά αύξουσα σειρά και να υπολογίσετε το εύρος τους (R) και τη διάμεσό τους (δ).

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.
- α.** Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i, i=1, 2, \dots, k$;
- β.** Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i=1, 2, \dots, k$;
- γ.** Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.
- A2.** Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- β.** $(\sin x)' = \eta \mu x$.
- γ.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.
- δ.** Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.
- ε.** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- B1.** Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α .
- B2.** Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .
- B3.** Για $\alpha = 4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.
- B4.** Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^3 - 3kx^2 + k, k \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό k .
- Γ2.** Για $k=1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται ελάχιστος.
- Γ3.** Για $k=1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$.

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, x \in A$$

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

β. Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός υποψηφίων n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
$[0,2)$	1	
$[2,4)$	7	
$[4,6)$	4	
$[6,8)$		
$[8,10)$	1	
Σύνολο	20	100

B1. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

- B3.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;
- B4.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i \%$).
- B5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i \%$) και τον οριζόντιο άξονα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

Έστω ότι $f'(1) + 3, 8, f(1), 7, f(2), 10$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

- Γ1.** Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων, τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $s = 2$.
- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(\frac{R}{3}, f\left(\frac{R}{3}\right)\right)$, όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.
- Γ4.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = x^2 + \frac{4s^2}{x} + \bar{x} - 27, \text{ με } x \neq 0,$$

όπου $\bar{x}$ και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και το σημείο $K(1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- Δ1.** Να δείξετε ότι $s = 2$ και $\bar{x} = 10$.
- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- Δ3.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$.
- Δ4.** Έστω ότι $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών $y_1, y_2, \dots, y_n$.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- A2.** α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;
β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- β. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
- γ. σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.
- δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα v_i , τότε $\alpha_i = \frac{v}{v_i} \cdot 360^\circ$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$ και v το πλήθος του δείγματος.
- ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι 11, 7, κ , 13, 11, 10 όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

- B1.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.
- B2.** Αν $\bar{x} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ .
- B3.** Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) και το εύρος (R) του παραπάνω δείγματος.
- B4.** Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$.
- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(5, f(5))$.
- Γ4.** Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- Δ1.** Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{3}{8}\right)$ και $f\left(\frac{5}{6}\right)$.
- Δ2.** Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - x)}$.
- Δ3.** Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
- Δ4.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.
- A2.** Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο σταθμικός μέσος $\bar{x}$ της μεταβλητής X .
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A , μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.
- β.** Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n .
- γ.** Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού της, με $g(x) \neq 0$ για όλες τις τιμές του x , τότε ισχύει:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$
- δ.** Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.
- ε.** Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος:

$$13, 12, \lambda + 5, 9, 14, 15, \kappa, 12, 17, 13$$

όπου: $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}.$

- B1.** Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.
- B2.** Για $\lambda = 2$ να υπολογίσετε την τιμή του κ , αν η μέση τιμή ($\bar{x}$) των προϊόντων είναι 12.
- B3.** Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση (s) των τιμών των προϊόντων είναι 3.
- B4.** Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 2x^2 - ax + 2$, όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- Γ1.** Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
- Γ2.** Για $\alpha = -1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Γ3.** Για $\alpha = -1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .
- Γ4.** Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι: $f(2019) + f(2020) > 2 \cdot f(1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = (\lambda - 3)x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 6\lambda,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0 < \lambda < 3$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι $y = -\lambda x + \lambda^2 - 6\lambda$.
- Δ2.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\lambda - 6)^2$.
- Δ3.** Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.
- Δ4.** Για $\lambda = 2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, $A_5(x_5, y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.
- β.** Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.
- γ.** Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και n το μέγεθος του δείγματος.
- A3.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.
- α.** $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$
- β.** $(\sqrt{x})' = \dots$ με $x > 0$
- γ.** $(\sin x)' = \dots$
- A4.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δε διάβασαν κανένα βιβλίο.

- B1.** Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.
- B2.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;
- B3.** Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;
- B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.
- Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.
- Γ3. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.
- Γ4. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$.

- Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)$.
- Δ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$.
- Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y = 1$.
- Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x, 1)$ της ευθείας $y = 1$ με $x > 0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x, 1)$ και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x = 1$.

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i=1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

A2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζεται και η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$

με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X , με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2 τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $v_2 = N_2 + N_1$, όπου $N_1 = v_1$.

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta \mu x)' = \dots$

β. $(x^p)' = \dots$, όπου p ρητός αριθμός.

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots$, όπου $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
0	1		
1	κ^2		
2	8		
3	$\kappa - 1$		
Σύνολο	20	100	

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.
- B2.** Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.
- B3.** Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;
- B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$.

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x < -1$.
- Γ2.** Αν $x \in [-4, -2]$, να αποδείξετε ότι $-3 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$.
- Γ3.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Γ4.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία K και L αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OKL , όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - \alpha^2 - 8\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Δ2.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του α .
- Δ3.** Να βρείτε για ποια τιμή του α το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.
- Δ4.** Για $\alpha = -4$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)}$.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , όπου $i=1, 2, \dots, k$;
- A2.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .
- β.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.
- γ.** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:
- α.** $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$, με $x \neq 0$.
- β.** $(x^v)' = \dots\dots\dots$, όπου v φυσικός αριθμός
- γ.** $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

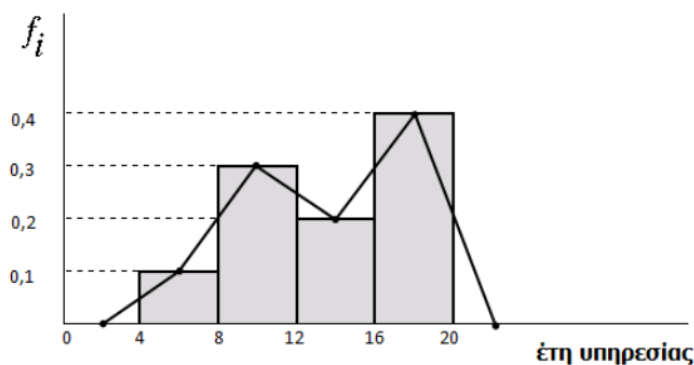
ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 2$, όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του a .
- B2.** Για $a = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.
- B3.** Για $a = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
- B4.** Για $a = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



- Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας $[,)$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

- Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;
 Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.
 Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80 m.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε τον πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
 Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
 Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;
 Δ4. Δύο οικοπέδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80 m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5$ m και $x_B = 34,2$ m αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικοπέδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- A2.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.
- α.** Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i για $i = 1, 2, \dots, k$;
- β.** Να αιτιολογήσετε για ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Ισχύει ότι $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.
- β.** Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x όταν $x = x_0$.
- γ.** Ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.
- δ.** Οι ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.
- ε.** Πλάτος μίας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - \alpha x + 6$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(4) = 12$.

- B1.** Να βρείτε την $f'(x)$ και να υπολογίσετε την τιμή του α .
- B2.** Για $\alpha = 4$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατά της.
- B3.** Για $\alpha = 4$ να δείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B4.** Για $\alpha = 4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 μαθητές/μαθήτριες ενός ΕΠΑ.Λ, για να μεταβούν από το σπίτι στο σχολείο τους, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους c , όπου

$$\frac{2}{c} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
[14,...)	15	30	15
[...,...)	20	40	...
[...,...)	...	...	...
[...,...)	5	...	50
Σύνολο	50	100	

- Γ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του πλάτους c .
- Γ2.** Για $c=8$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
- Γ3.** Για $c=8$ να βρείτε το ποσοστό των μαθητών/μαθητριών που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x(3x-2) - 8$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.
- Δ2.** Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.
- α.** Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 4$ δευτερόλεπτα.
- β.** Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.
- γ.** Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 10$ δευτερόλεπτα.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.
- A2.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.
- β.** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- γ.** Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.
- A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:
- α.** $(\sqrt{x})' = \dots$
- β.** $(f(g(x)))' = \dots$

ΘΕΜΑ Β

Κατά το μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν: 25, 10, 5, 20, 15.

- B1.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και το εύρος του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.
- B2.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .
- B3.** Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.
- Γ2.** Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.
- Γ3.** Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ4.** Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$.

Δ2. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)}, \quad s = \frac{1}{2f''(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Δ3. Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά και πόσοι πάνω από 15 λεπτά;

Δ4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X μεγέθους n που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι μηδέν.
- A2. α.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μίας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, όπου $\bar{x} \neq 0$;
- β.** Πότε ένα δείγμα τιμών μίας μεταβλητής είναι ομοιογενές;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_1 .
- β.** Αν f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$.
- γ.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.
- δ.** Το εύρος ή κύμανση (R) είναι μέτρο διασποράς.
- ε.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + 3$, όπου x, a πραγματικοί αριθμοί.

- B1.** Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι ίσος με 14, να αποδείξετε ότι $a = 2$.
- B2.** Για $a = 2$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f''(x) + 14}{x^2 - 9}$.
- B3.** Για $a = 2$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) - 16x$, με x πραγματικός αριθμός, ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ Γ

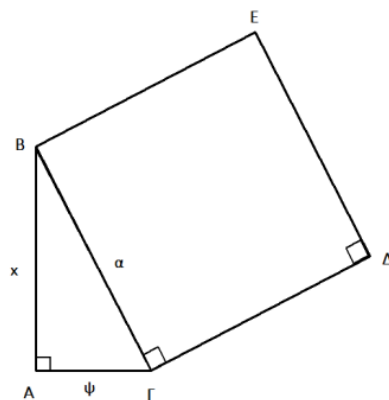
Οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάστηκαν 200 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα, ομαδοποιήθηκαν σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i \%$
20 – 24	...	0,10	...
24 – 28	...	0,20	...
28 – 32	...	0,30	...
32 – 36	...	0,35	...
36 – 40	...	...	...
Σύνολο	200	...	

- Γ1. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.
- Γ2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις %.
- Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών οι οποίοι χρειάστηκαν μέχρι και 26 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα.
- Γ4. Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο που χρειάζεται ένας μαθητής για να λύσει το πρόβλημα.

ΘΕΜΑ Δ

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$), με κάθετες πλευρές $AB=x$, $A\Gamma=\psi$ και υποτείνουσα $B\Gamma=a$, κατασκευάζουμε εξωτερικά τετράγωνο $BE\Delta\Gamma$, με πλευρά $B\Gamma=a$, όπως στο διπλανό σχήμα. Αν το άθροισμα των κάθετων πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 20 cm, τότε:



- Δ1. Να εκφράσετε την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x .
- Δ2. Να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ του τετραγώνου $BE\Delta\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρεθεί το πεδίο ορισμού του εμβαδού $E(x)$.
- Δ3. Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;
- Δ4. α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $T(x)$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $T(x)=10x-\frac{1}{2}x^2$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όταν το εμβαδόν $T(x)$ του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με $cf'(x)$.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i=1, 2, \dots, \kappa$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.
- β.** Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- γ.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
- δ.** $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$.
- ε.** Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- B2.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το a .
- B3.** Για $a = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.
- B4.** Για $a = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές / τριες της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης της προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		v_3	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι $\bar{x} = 14$.

- Γ1. Να δείξετε ότι $v_3 = 10$.
- Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.
- Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .
- Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

- Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.
- Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4, -1]$ ισχύει: $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$.
- Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.
- Δ4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3 .

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i=1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

A2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διακύμανση ενός δείγματος είναι μέτρο θέσης.

β. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t) = x'(t)$.

γ. $(x^p)' = px^{p+1}$, όπου

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \dots$

β. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \dots$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1, \ell_1$ πραγματικός αριθμός, v ακέραιος.

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος αναμονής (σε λεπτά) ενός δείγματος επιβατών σε μία στάση λεωφορείου, κατά τη διάρκεια μίας ημέρας, ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(\sqrt{x}-1)}$.

B1. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s .

Αν $s=1$:

B2. Να βρείτε το ποσοστό του δείγματος με χρόνο αναμονής από 3 ως 6 λεπτά.

B3. Να βρείτε τη διάμεσο δ , τον συντελεστή μεταβολής CV και να εκτιμήσετε το εύρος R .

B4. Αν ο χρόνος αναμονής 380 ατόμων είναι από 3 έως 7 λεπτά, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

ΘΕΜΑ Γ

Τα έτη υπηρεσίας των 50 υπαλλήλων μίας εταιρείας ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτη [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
[0,10)	5	7	14	...
[10,20)	15	$2\alpha + 4$	...	...
[20,30)	25	10	...	...
[30,40)	35	$3\alpha - 6$	...	100
Σύνολο		50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε το α .

Αν $\alpha = 7$:

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

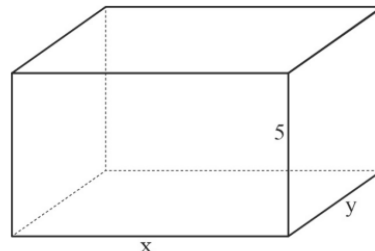
Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή

Γ4. α. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

β. Να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

ΘΕΜΑ Δ

Μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με ύψος 5 μέτρα, έχει βάση ορθογώνιο μήκους x και πλάτους y (οι διαστάσεις x , y εκφράζονται σε μέτρα). Η περίμετρος της βάσης είναι 40 μέτρα.



Δ1. Να εκφράσετε το πλάτος y ως συνάρτηση του x .

Δ2. Να δείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $V(x) = 100x - 5x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του όγκου $V(x)$.

Δ3. α. Για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει τον μέγιστο όγκο;

β. Να υπολογίσετε τον μέγιστο όγκο.

Δ4. Δύο δεξαμενές Α και Β ίδιου σχήματος με την αρχική, έχουν μήκη $x_A = 11,81$ μέτρα και $x_B = 11,82$ μέτρα αντιστοίχως. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποια από τις δύο δεξαμενές έχει τον μεγαλύτερο όγκο.

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

A2. α) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Τι ονομάζεται συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i, i = 1, 2, \dots, k$;

β) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.

β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Ισχύει $(\eta \mu x)' = \sigma \nu x$.

δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μιας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια πόλη της Ελλάδας ήταν: 22, 18, $20 + \kappa$, 14, 16 όπου κ πραγματικός αριθμός.

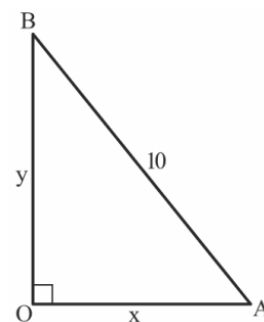
Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι ίση με

$$s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$$

- Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$.
- Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x} = 20$.
- Γ3. Να δείξετε ότι $\kappa = 10$ και να βρείτε τη διάμεσο δ .
- Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο AOB με $\hat{O} = 90^\circ$, κάθετες πλευρές μήκους $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα μήκους $(AB) = 10$.



- Δ1. Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Δ2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = 8$.
- Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6}$.
- Δ4. Αν $x_1 = 2,3$, $x_2 = 3,5$ και $x_3 = 2,8$ είναι οι τιμές της πλευράς x , να αιτιολογήσετε ότι:

$$f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.
- A2.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A3.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i = 1, 2, \dots, k$;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.
- β.** Η τυπική απόκλιση είναι μέτρο θέσης.
- γ.** Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , τότε: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.
- δ.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$.
- ε.** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \ell_1$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και k πραγματική σταθερά.

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των παιδιών ανά οικογένεια ενός δείγματος 20 οικογενειών.

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0		25	
1			13
2	5		
3			
ΣΥΝΟΛΟ	20	100	

- B1.** Αφού μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας, να συμπληρώσετε τα κενά.
- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.
- B3.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ και το εύρος R .
- B4.** **α)** Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά.
β) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ ένα παιδί.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, α, β πραγματικοί αριθμοί, για την οποία ισχύουν:

- $f'(2) = 7$
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = -5$.

Για $\alpha = -1$ και $\beta = -5$:

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Γ3. Να βρείτε την τετμημένη x_0 του σημείου $K(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Γ4. Αν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ να προσδιορίσετε το πρόσημο της διαφοράς $A = f(x_1) - f(x_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = (x-1)^2 + 2$ και $g(x) = 2x - 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κατακόρυφου τμήματος AB ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $d(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{d(x) - 2}{\sqrt{g(x)} - 2}$.

Δ3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του x , για την οποία το μήκος $d(x)$ γίνεται ελάχιστο και να το υπολογίσετε.

Δ4. Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 2$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

