

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

- α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμψής .
- β) Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της να σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο .
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha > 1$ τέτοιο ώστε , η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ να διέρχεται από το σημείο στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο η f .
- δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε , η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμψής της.
- ε) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (f \circ g)(x)$ με $g(x) = e^x$ έχει μοναδική λύση κ με $\kappa \in (0, 1)$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της f και της $f \circ g$ και της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία που παρουσιάζουν ολικό ελάχιστο, ως συνάρτηση του κ .