

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

- α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία, το ένα με τετμημένη ίση με 1 και το άλλο με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα $(2, e)$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha > \sqrt{e}$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της.
- δ)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο της $(1, f(1))$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- ε)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ με $g(x) = \frac{1}{x}$.
- ii.** Να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f \circ g$ την επανατέμνει.
- στ)** **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h : [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x)$ αντιστρέφεται.
- ii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της h και της αντίστροφής της h^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.