

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x$.

- α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα (e, e^2) .
- γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα $(1, \sqrt{e})$.
- δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq e$ ισχύει ότι $\ln^2 x - x \ln x + \left(2 - \frac{2}{e}\right)x + 1 \leq e$.
- ε) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τέμνει ξανά μόνο μία φορά .

στ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{(f \circ g)(x)}{g^2(x)} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ με $g(x) = \frac{1}{x}$.

- i. Να δείξετε ότι η h είναι συνεχής στο 0 .
- ii. Να εξετάσετε αν η h είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
- ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της στο τοπικό της ελάχιστο.