

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x \ln x - x^2 - x$.

- α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από τη αρχή των αξόνων .
- γ)** Να δείξετε ότι η ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f έχει άλλο ένα κοινό σημείο με αυτήν .
- δ)** Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $g : (0, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x \ln x - x^2 + 1$. Να βρείτε τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- στ) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$ με $h(x) = \frac{1}{x}$.
- ii.** Να δείξετε ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = (f \circ g)(x)$ είναι το 1.
- iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $f \circ g$ και την ευθεία $x = e$.