

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
- β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^{2\sqrt{x}} = \frac{1}{e}$ με $x > 0$.
- δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον δύο εφαπτομένες κάθετες μεταξύ τους, οι οποίες δεν είναι παράλληλες στους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- ε) Έστω ένα σώμα το οποίο βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων και ξεκινά να κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f . Η τετμημένη του σημείου στο οποίο βρίσκεται το σώμα κάθε χρονική στιγμή αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , τη χρονική στιγμή που το σώμα τέμνει τον άξονα $x'x$.
- στ) **i.** Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.