

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln^2 x$.

- α)** Να δείξετε ότι ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
- β)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .
- γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f , η οποία σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο .
- δ)** Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων .
- ε)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων καθώς και την ελάχιστη αυτή τιμή .
- στ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της f , της ευθείας (ε) και της ευθείας $x = e$.
- ζ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = e^{-\sqrt{x}}$.
 - ii.** Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται.
 - iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της h και της αντίστροφής της h^{-1} έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.