

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x \ln x$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής , η τετμημένη του οποίου βρίσκεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη α με $\alpha > 1$.
- δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της με τετμημένη $x_0 \geq 1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $-e$.
- ε) Να βρείτε το πλήθος των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $y = ex$.
- στ) i. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g με $g(x) = x \ln x$ στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e e^x \cdot \ln x \, dx > \frac{e^2 + 1}{4}$.
- ζ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1, \sqrt{e})$.
- η) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} \eta \mu \left[\frac{f(x)}{x} \right]$.