

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$  και  $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$ .

- α)** **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $g$ .
- ii.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- β)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
- γ)** **i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι  $\ln x \leq (2x^2 - 1)(x - 1)$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(1, f(1))$  βρίσκεται πάνω από αυτήν εκτός από το σημείο επαφής.
- δ)** Να δείξετε η γραφική παράσταση της  $g$  έχει μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ενώ η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει καμία εφαπτομένη που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ε)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ( $\varepsilon$ ) και την ευθεία  $x = e$ .
- στ)** **i.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ισχύει ότι  $f^{-1}(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , την ευθεία  $y = x$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = f(e)$ .