

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (x - \alpha)^2 + \ln x$ , όπου  $\alpha > 0$ .

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(e, f(e))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = e$  και επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει άλλη μία εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- β)** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $f$ , την πλάγια ασύμπτωτη της  $f'$  στο  $+\infty$  και την οριζόντια ασύμπτωτη της  $f''$  στο  $+\infty$ .
- γ)** Να δείξετε ότι η  $f$  έχει δύο τοπικά ακρότατα με θέσεις  $x_1 \in \left(\frac{1}{2e}, \frac{1}{e}\right)$  και  $x_2 \in (e-1, e)$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία τοπικών ακροτάτων την επανατέμνουν.
- δ)** **i.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \geq 1$ , η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από την ( $\varepsilon$ ) εκτός από το σημείο επαφή τους.  
**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ( $\varepsilon$ ) και την ευθεία  $x = 1$ .
- ε)** Έστω η συνάρτηση  $g : [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x)$ . Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $g$  και  $g^{-1}$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.