

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x \ln(1-x)}{2} & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ (1-x)e^{\frac{x}{2}} & , x > 0 \end{cases} .$$

- α)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $0$  .
- β)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** **i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.  
**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο σημείο της  $(1, f(1))$  και την ευθεία  $x = 1 - e$  .
- δ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\alpha \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\alpha, f(\alpha))$  να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της στο σημείο  $(2, f(2))$  .
- ε)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  , όπου  $g(x) = \ln x$  .  
**ii.** Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $h$  με τετμημένη  $x > 1$  . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με  $\sqrt{e}$  cm/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $y$  , τη χρονική στιγμή που τέμνει τον άξονα  $x'x$  .

Schools.patafis.gr