

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

β) i. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση x_0 που βρίσκεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{2}{e}\right)$.

ii. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$.

γ) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > \frac{1}{e}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

δ) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ με $g(x) = e^{-x}$ και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της h έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη που βρίσκεται στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , την εφαπτομένη της στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

ε) i. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} (f \circ t)(x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ με $t(x) = \frac{1}{x}$.

Να δείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0.

ii. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < e$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$.