

Δίνεται η συνάρτηση  $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$ .

- α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$ .
- β)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο οποίο η εφαπτομένης της τέμνει τον άξονα  $yy'$  σε σημείο στο οποίο η τεταγμένη παίρνει ελάχιστη τιμή.
- γ)** Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$ .
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x_0\in(\sqrt{e},2)$ .
- ii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda>0$ , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $(\lambda,f(\lambda))$  είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο της  $(\lambda,g(\lambda))$ .
- iii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x>0$  ισχύει ότι  $2f(x)\leq x-1$ .
- δ)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $g\circ h$  με  $h(x)=\sqrt{x}$  και να αποδείξετε ότι για κάθε  $x>0$  ισχύει ότι  $(g\circ h)(x)\geq g(x)$ .
- ii.** Έστω  $E(\alpha)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $g\circ h$  και την ευθεία  $x=\alpha$  με  $0<\alpha<1$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\alpha\rightarrow 0}E(\alpha)$ .
- ε)**
- i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $g\circ\varphi$  με  $\varphi(x)=e^{1-x}$  και να βρείτε την ασύμπτωτή της  $(\varepsilon)$  στο  $+\infty$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g\circ\varphi$  ακριβώς σε ένα σημείο και τη γραφική παράσταση της  $g$  ακριβώς σε ένα σημείο.
- iii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x\geq 1$  ισχύει ότι  $(g\circ\varphi)(x)\geq g(x)$ .