

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ .

- α) Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει ότι  $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$  και να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- β) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1]$ .
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = \frac{1}{x}$  και να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .
- δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\varphi(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$  είναι συνεχής και να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ .
- ε) Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $\varphi$ .

Schools.patakis.gr