

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$ .

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- γ) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
- δ) Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq -3 \\ 0 & , x = -3 \end{cases}$ .

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{g(x) - g(-3)}{x + 3}$ .

- ε) i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = f(x)$  έχει τύπο  $h(x) = \sqrt{1 + \frac{5}{x-2}}$  και είναι γνησίως φθίνουσα. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της  $h^{-1}$ .
- ii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $h$  και  $h^{-1}$  τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (2, 3)$ .