Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+x &, \quad x<0 \\ 0 &, \quad x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} &, \quad x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)\leq x^2$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

δ) Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, έχει μέγιστο το $g(1)=3$ και ισχύει $g(0)=2$, $g(2)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

i. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(f\circ g)(x)\right]$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(f\circ g)(x)\right]$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{g(x)}$.

iii. Να δείξετε ότι συνάρτηση $f\circ g$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,2)$.

iv. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0,2]$.