

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{x} \sin x}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)}, & x < 0 \end{cases}$.

α) i. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $\frac{1 - \sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1 + \sqrt{x}}{x+1}$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{x}{2} \right]$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

δ) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση x_0 στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ii. Να δείξετε ότι $\varepsilon \varphi x_0 = -\sqrt{x_0 - 1}$.

ε) Έστω, επιπλέον, οι συναρτήσεις $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \text{και} \quad h(x) = \begin{cases} (f \circ g)(x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η h είναι συνεχής.

SCHOOLS.DATAKIS.GR