

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \left(2 - \frac{\alpha}{x}\right)(\beta - \ln x)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
- β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της και το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές του $x \in (0, +\infty)$.
- γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής $(\lambda, f(\lambda))$ με $\lambda \in (\sqrt{e}, 2)$.
- ii.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη κ , να δείξετε ότι το κ παίρνει τη μέγιστη τιμή του για $x_0 = \lambda$.
- δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{1}{x}$ ακριβώς σε δύο σημεία, στο $(1, f(1))$ και στο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\sqrt{e}, 2)$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.