

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ .

- α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$  και παραγωγίσιμη στο  $0$ .
- β) Να δείξετε ότι  $0 < f(x) < 1$  για κάθε  $x > 0$ .
- γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- δ) i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $x$  σε σημείο με τετμημένη  $-1$ .
- ii. Να δείξετε ότι  $f(x) \leq \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$  για κάθε  $x > 0$ .
- ε) Αν  $\lambda$  είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 > 0$ , να δείξετε ότι το  $\lambda$  έχει ελάχιστη τιμή όταν το  $(x_0, f(x_0))$  είναι το σημείο καμψής της  $f$ .
- στ) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ .
- ii. Να δείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το  $\int_1^e h^{-1}(x) dx$ .

Schools.pataklis.gr