

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \alpha x + \beta + \gamma \ln(x^2 + 1)$  όπου  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ .

Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της  $(-1, \ln 2)$  και ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

α) Να δείξετε ότι  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής  $A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, f(x_2))$  με  $x_1 < x_2$  της γραφικής παράστασης της  $f$ .

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μοναδική εφαπτομένη σε σημείο της  $\Gamma(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ .

δ) Έστω  $\lambda$  η τεταγμένη του σημείου τομής του άξονα  $yy'$  με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(\xi, f(\xi))$ , όπου  $\xi \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι το  $\lambda$  παίρνει ελάχιστη τιμή όταν  $\xi = x_1$  ή  $\xi = x_2$ .

ε) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = \sqrt{e^x - 1}$ .

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha > 0$  ισχύει  $\int_0^\alpha g(x) dx \geq \int_0^\alpha \ln(x^2 + 1) dx$ .

Schools.pataklis.gr