

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + \ln x}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ \beta - e^{1-x} & , x > 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.
- β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0$.
- γ) i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, σε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (2, 3)$.
ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $x^2 \geq e^{x_0-1} \ln x$.
- δ) Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > 1$. Αν τα εμβαδά E_1 και E_2 είναι αντίστροφα, να δείξετε ότι το λ παίρνει μοναδική τιμή το 2.

Schools.pataklis.gr