Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x+\alpha}{x^2+1}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε σημείο Α με τεταγμένη ίση με -1 . Η γραφική παράσταση της f , η εφαπτομένη της στο σημείο Α και η ασύμπτωτή της (ε) στο $+\infty$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Β .

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Να δείξετε ότι το σημείο Α είναι πάνω στον άξονα yy' και ότι η f παρουσιάζει ακόμα ένα τοπικό ακρότατο σε σημείο Γ με τετμημένη $x_0\in(-1,0)$, του οποίου να βρείτε το είδος.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

δ) Να δείξετε ότι το σημείο Δ στο οποίο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ είναι σημείο καμπής της και να βρείτε τις θέσεις των άλλων σημείων καμπής της .

ε) Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f\left(\dfrac{\lambda^2}{x}\right)$, όπου $\lambda>0$.

Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κάθετες εφαπτομένες σε κοινό τους σημείο, να βρείτε το λ .

στ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία γίνεται μέγιστη η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της (ε) .