

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(3, f(3))$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σημείο με τετμημένη  $-1$ . Η ευθεία  $y = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $f$  στο  $+\infty$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = -2$ .
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ .
- γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- δ) Έστω οι συναρτήσεις  $g: (-\infty, -4) \cup [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = (x-1)^2$  και  $g \circ h = f$ .
- i. Να δείξετε ότι  $g(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x+4}}$ .
- ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $g(x) + \sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) = 1$ , για τις διαφορές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .