

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x + \alpha x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση $e^{\frac{1-k}{x}} = \frac{e}{x}$ με $x > 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} e^{1-x} - \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ f(x), & x \geq 1 \end{cases}$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της g .

ii. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται.

iii. Αν g^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της g , να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1} έχουν μοναδικό σημείο τομής.