

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x-1)\ln(1-x)} & , x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$.

α) i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

ii. Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{2}$.

β) i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι βρίσκεται κάτω από αυτήν.

ii. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν το χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα

$x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$. Να δείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) \geq \frac{(e-1)^2}{2e}$.

δ) Η τετμημένη x_0 ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της f κινείται με ρυθμό 1 cm/s . Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(x_0, y_0)$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB όταν $x_0 = 1$.