

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $2\sqrt{1-x}f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x < 1$.

- α)** Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\sqrt{1-x}}$ για κάθε $x \leq 1$.
- β)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- ii.** Να λύσετε την εξίσωση $2\sqrt{1-x} = \ln \left[\eta\mu^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right]$ στο διάστημα $(0, 1]$.
- γ)** **i.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- ii.** Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^{1-\sqrt{1-x}}(2-x) < 2$.
- δ)** **i.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτησή της f^{-1} .
- ii.** Έστω A το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα yy' και B το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} και την ευθεία AB .
- iii.** Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & , x < 1 \\ f^{-1}(x) & , x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$.
- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο B την τέμνει πάνω στον άξονα yy' . Το σημείο $\Gamma(1, 1)$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της g . Να βρείτε τα α, β και γ .