

Έστω η συνάρτηση $f : (-\infty, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha x + \beta & , x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + \gamma & , x \geq 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = x - 1$.

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 0$, $\beta = -1$ και $\gamma = 0$.
- β)**
- i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - ii.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφής της f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.
 - iii.** Έστω η συνάρτηση $g : (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^{-1}(x) + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της g και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- γ)**
- i.** Να βρείτε την αρχική F της f η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο πάνω στον άξονα $x'x$.
 - ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = e$.

Schools.patakis.gr