

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-\alpha x-\ln x$, $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $1-x^2-\ln x=0$ έχει μοναδική λύση το 1.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}+2$, η οποία έχει σημείο καμπής πάνω στον άξονα $x'x$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφής της f^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τους άξονες $x'x$ και yy' και την ευθεία $x=f(e)$.

γ) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ\varphi$ όπου $\varphi(x)=\frac{1}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Schools.patakis.gr