

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln x & , x > 0 \\ x^2 e^x + \alpha x + \beta & , x \leq 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.
- β) Να βρείτε την ασύμπτωτη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η (ϵ) είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f και διέρχεται από το ολικό της μέγιστο.
- γ) Να δείξετε ότι η άλλη εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, την επανατέμνει σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, \sqrt{e})$.
- δ) **i.** Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία (ϵ).
- ε) Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και κάθε χρονική στιγμή η θέση του είναι το σημείο $M(x, f(x))$, $x > 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης x είναι θετικός, να βρείτε το σημείο M όταν ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του x είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y .