

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 + \alpha) \ln x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της f έχει σημείο καμπής πάνω στον άξονα $x'x$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και το σύνολο τιμών της.

γ) i. Να βρείτε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ g)(x) = \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)x$.

ii. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) \eta \mu \left(\frac{1}{g(x) - 1} \right)$.

δ) i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = x$, σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, \sqrt{e})$.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) - x \geq f(x_0) - x_0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \frac{6 \ln x}{x}$.

Schools.patakis.gr