

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} -x(\alpha - \ln x)^2 & , x > 0 \\ \sqrt{-x} & , x \leq 0 \end{cases}$ ,  $\alpha > 0$ .

Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει σημείο καμπής το  $(\alpha, -\alpha)$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .
- β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ .
- γ)** **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = 4e^x - 4xe^x + 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $\varphi(2) < 0$ .
- ii.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(-1, f(-1))$  επανατέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε δύο σημεία.
- δ)** **i.** Να βρείτε την αρχική συνάρτηση  $F$  της συνάρτησης  $f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και την εφαπτομένη της σε σημείο με αρνητική τετμημένη η οποία διέρχεται από το τοπικό της μέγιστο.