

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x + \alpha}{x}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x γίνεται ελάχιστος για $x = \sqrt{e^3}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: **i.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(e^{-x}) + f\left(\frac{1}{x}\right)}$ και **ii.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(e^{-x}) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{2e}x$ για κάθε $x > 0$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία (ε).

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$.

i. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και ότι η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης g^{-1} της g βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

ii. Να βρείτε την ελάχιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g^{-1} και της ευθείας $y = x$.