

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\ln x}$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\beta \neq 0$ .

Ο άξονας  $x'x$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

Η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο  $(1, -e)$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = 1$ .
- β)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.
- δ)** **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  με  $g(x) = e^{1-x^2}$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $h$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία  $x = e$ .
- ε)** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $\varphi$  με  $\varphi(x) = f^2(x)$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda > e$ .
- Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [E(\lambda+1) - E(\lambda)]$ .