

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{ax}}{1-x}$, όπου $a < 0$.

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(a, f(a))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με $-a$.

α) Να δείξετε ότι $a = -1$.

β) i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $2e^{-x} = (1-x)(\sin x + 1)$.

γ) i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Αν $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι η (ε) είναι η εφαπτομένη της στο σημείο της $(x_1 + x_2, f(x_1 + x_2))$.

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (1-e, 1)$ ισχύει ότι $f(\ln(1-x)) \geq -\frac{e}{4}(x+1)$.

δ) i. Να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 1$ ισχύει ότι $f(x) = (1+x)e^{-x} + x^2 f(x)$.

ii. Να δείξετε ότι $e - \frac{5}{3} \leq \int_{-1}^0 f(x) dx \leq \frac{7e}{6} - 2$.