

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (1-x) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

- α) i.** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1, +\infty)$.
- iii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και το σύνολο τιμών της f .
- β)** Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1-x} = e$.
- γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της (e) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της (e) και την ευθεία $x = e$.
- ε) i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ όπου $g(x) = \frac{1}{1-e^x}$.
- ii.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} h(x) & , x \in A_h \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0 .
- iii.** Να δείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και η γραφική παράσταση της αντίστροφής της φ^{-1} βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση.