

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \alpha x + \alpha$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια εφαπτομένη τον άξονα  $x'x$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .
- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$  και το σύνολο τιμών της.
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει κι άλλη εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ) Έστω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ασύμπτωτή της  $(\varepsilon)$  στο  $+\infty$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda > 1$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- ε) i. Να βρείτε την εφαπτομένη  $(\zeta)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία είναι παράλληλη στην ασύμπτωτή της  $(\varepsilon)$  και να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $f$ .
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την εφαπτομένη  $(\zeta)$ .
- στ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$  όπου  $g(x) = 1 - e^{-x}$  και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- ζ) Σημείο  $M(x, y)$  κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $f$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του  $x$  είναι σταθερός θετικός αριθμός, να δείξετε ότι είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $y$  ακριβώς σε δύο χρονικές στιγμές.