

Δίνεται η συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=\frac{\alpha-\ln x}{x}$ ,  $\alpha\in\mathbb{R}$ , και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης  $(\varepsilon):y=-\lambda^2x+\lambda$ ,  $\lambda>0$ . Επιπλέον, ισχύει ότι  $e^2f(x)\geq\alpha-2$  για κάθε  $x>0$ .

α) Να δείξετε ότι  $\alpha=1$  και  $\lambda=\frac{1}{e}$ .

β) Έστω η συνάρτηση  $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  με  $g(x)=f(e^{-x})$  και  $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$  τα σημεία που τέμνει η γραφική παράσταση της  $g$  τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$  αντίστοιχα.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη  $(\zeta)$  της γραφικής παράστασης της  $g$  σε σημείο της  $(x_0,f(x_0))$  με  $x_0\in(x_A,0)$  η οποία να είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ .

ii. Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$  και τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$  και  $E_2$  το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η  $(\zeta)$  με τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$ . Να δείξετε ότι  $E_1>E_2$ .

γ) Έστω  $E(\kappa)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την  $(\varepsilon)$  και την

ευθεία  $x=\kappa$  με  $\kappa<e$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\kappa\rightarrow 0^+}\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{E(\kappa)}$ .

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2\int_{-1}^0 f(e^x)dx$  έχει ρίζα το  $e$ , να βρείτε άλλη μία ρίζα της εξίσωσης και να δείξετε ότι δεν έχει άλλες ρίζες.

ε) Να δείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων έχει τετμημένη στο διάστημα  $(1,\sqrt{e})$  και η απόσταση αυτή είναι μικρότερη από 2 μονάδες.