

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- α) i.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .
- ii.** Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f .
- β) i.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ii.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (x+1)e^{-\frac{\alpha}{x^2}}$ και $\alpha > 0$, τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ σε μοναδικό σημείο για κάθε $\alpha > 0$.
- γ) i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.
- ii.** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda < 1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.
- δ)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφη της f^{-1} έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.