

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x + \alpha}{\sqrt{x + \beta}}$, $\alpha, \beta > 0$.

Οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ικανοποιούνται για την f στο διάστημα $[0, 1]$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $(\sqrt{2} - 1)^2$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$ και να δείξετε ότι βρίσκεται κάτω από αυτήν στο διάστημα $[0, 1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της (ε) και τον άξονα yy' .

γ) i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ όπου $g(x) = \ln^2 x$, $x \geq 1$.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει ότι $f(x) \geq h(x)$.